ANALYSIS,

Oder

Der gründlichen

Anweisung

Zu

Der Buchstaben-Rechen-Kunst

Anderter Theil,

Welcher

Von der Weise die Gleichungen, und Aufgaben des ersten, anderen, und dritten ꝛc. Grades aufzulösen handelt,

Und

Zu mehrerem Aufnehmen Algebraischer Wissenschafften aufgesetzet worden

Von

Johann Baptist Eberenz.

Augspurg und Freyburg im Breyßgau,

In Verlag der Gebrüder Jgn. und Anton Wagner Buchhändlern. 1758.

Vorrede.

Günstiger Leser!

Bisher habe ich in verschiedenen Exempeln die Regeln der Algebra deutlich beschrieben: nun aber wird es Zeit seyn, daß ich darthue, wie man in der Analysi mit sonderbarem Vortheile sich derselben bediene. Es handelt die Analysis von Auflösung der Gleichungen, und sowohl de- als undeterminirten Aufgaben; derowegen soll ich zeigen, wie man durch Hülfe der Algebra die Natur der Gleichungen, und ihre vornehmste Eigenschaften untersuchen, und die vorgelegte

Aufgaben auflösen kan. Diese Betrachtung komet denenjenigen sehr zu statten, welche die Geheimnisse der Natur und Kunst genauer als andere einzusehen belieben; denn man kan die Vortrefflichkeit des menschlichen Verstandes nicht völliger, und deutlicher erkennen, als durch die Analysin; dannenhero nennet sie auch der Herr von Wolf **den Gipfel menschlicher Wissenschaften.** Ich habe demnach die gemeine Algebra in Auflösung der Gleichungen, und Aufgaben des ersten, anderen, und dritten Grades so abgehandelt, und erkläret, daß sich die Anfänger darinnen leicht zu rechte finden werden, wenn sie nur die in dem ersten Theile angebrachte Regeln inne haben, und so zu reden, nur ein wenig in der Algebraischen Rechnung geübet sind. Ich habe diesen Theil zu ferneren Erläuterung deren von dem Herren von Wolf beschriebenen Anfangs-Gründen der Algebra eingerichtet. In dieser Absichte hab ich nicht nur die von diesem grossen Mathematico in der 8. Aufgabe vorgeschriebene Regel eine Aufgabe Algebraisch aufzulösen nach meiner Lehr-Art weitläuffig erläuteret, sonderen auch desselben so nützlich- als zierliche Aufgaben mit anmuthigen Exempeln so erkläret, damit der durch die Algebraische Rechnung ermüdete Geist aufgemunteret würde.

Die allgemeine Aufgaben des Herren von Wolf hab ich von Wort zu Wort behalten, und als Vorsprüche meiner Paragraphen gesetzet, alsdenn aber ihren allgemeinen Verstand auf besondere Fälle in den beygefügten Exempeln gerichtet; damit die Vernunfft, welche allgemeine Dinge, nicht sowohl, als die besondere begreiffen mag, in ihrer

Arbeit

Arbeit beförderet würde, und dennoch die Operation allgemein verbliebe. Bey den Gleichungen des anderen und dritten Grades hab ich die Regeln, so man insgemein Cardani Regeln nennet, weil er sie aus Scipionis ferrei, Erfindung zu erst in Druck gegeben, nach meiner Lehr-Art erkläret, und es bey dem dritten Grade bewenden lassen; denn, ob man zwar schon auf eine gleiche Art eine Regel für die Wurzeln aus einer Gleichung von dem vierten Grade auszuziehen, gefunden, so habe doch, weil sie nicht sonderlich gebraucht wird, dieselbe hieher nicht bringen wollen, sondern bin vielmehr fortgegangen, und habe zur Erläuterung der 113ten Aufgabe in den vorgerühmten Anfangs-Gründen der Algebra, wie man alle Rational-Wurzeln, die in einer Gleichung enthalten sind, finden könne, gewiesen. Diese Weise kan bey Auflösung der Gleichungen des vierten, fünfften, sechsten, und auch höheren Graden, als eine allgemeine Regel angebracht werden. Bey den Aufgaben sahe ich haubtsächlich darauf, daß ich solche beybrachte, die entweder besondere Kunst-Griffe in sich enthielten, oder, weil die Algebra eine fruchtbare Mutter aller Regeln der gemeinen Zahl-Rechnung ist, allgemeine Lehrsätze für alle ersinnliche Fälle an die Hand gaben; damit ich nichts vortrüge, was nicht seinen gewissen Nutzen verspräche. Ubrigens, wenn die Liebhaber die erwünscheten Früchten aus diesem Theile ziehen wollen, werden sie die in der Vorrede des ersten Theiles gegebenen Ermahnungen fleißig beobachten.

Der Buchstaben-Rechen-Kunst

Anderer Theil

handelt von

Auflösung der Gleichungen und Aufgaben des ersten, anderen, und dritten ꝛc. Grades.

Das Erste Capitel

Von der Weise die unbekannten Grössen bekannt zu machen.

§. I.

§. I.

Von der Analysi, und Synthesi.

Es seynd zwey Wege, auf welchen man zur Erkanntnis der Wahrheit gelanget: der eine heisset Analysis, und der andere Synthesis. Die Analysis führet uns Anfangs durch die natürliche Vernunfts-Gesätze, und erhebet sich gleichwie auf einer Stiege Stuffen-weis bis sie von den besondern Sätzen zu allgemeinen, das ist, zur Erkanntnis der gesuchten Wahrheit gelanget; hingegen führet uns die Synthesis, so zu reden, eben diese Stiege wiederum nach und nach herunter, das ist, sie gehet von den allgemeinen Sätzen zu den besonderen; da sie unterweges alle folgen, die aus einer gemachten Supposition eingeführet werden können, untersuchet, bis sie sich aus dem Dunkeln hervor- und ihre gefaßte Schlüsse an des hellen Tages-Liechte aus unumstößlichen Gründen unwiedersprechlich zum Vorscheine bringet. Demnach bestehet der Unterscheid der Analyseos, und Syntheseos hauptsächlich darinne, daß diese von den allgemeinen Sätzen zu den besondern gehet, wo jenne im Gegentheile von den besondern zu den allgemeinen schreittet. Dannenhero verstehen wir durch die Analysin eine sicher-Weise die Aufgaben durch Hülfe der Syntheseos oder Algebraischen Zeichen und Rechnungs-Art aufzulösen.

§. II.

Grundsätze.

1.) Ein jedes Ding gleichet sich selbsten. Dieser Grundsatz hat seinen unaussprechlichen Nutzen in der Analysi.

2.) Wenn zwey Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie einander gleich.

Beweiß.

Beweis.

Es sey A=C, und B=C; ich sage A=B; denn, weil B=C gesetzet worden, so kan B in die Stelle des C angenohmen werden. Setzen wir also in dem Falle, wo A=C, das B für C: so komet A=B heraus. Welches zu erweisen war.

3.) Das ganze ist gleich allen seinen Theilen zusamen genommen, und grösser als ein jeder insonderheit.

Beweis.

Weil ein jedes Ding sich selbst gleichet (1) so ist dasjenige, was mit allen Theilen des Ganzens zusamen genommen einerley Weesen ist, auch denenselben gleich. Nun aber ist das Ganze mit allen seinen Theilen zusamen genomen einerley Weesen, folgends denenselben auch gleich. Welches das Erste war.

Grösser ist, wessen Theil einem anderen Ganzen gleich ist; nun aber ist ein jeder Theil des Ganzens eben diesem Theil, das ist, sich selbsten gleich (1); folgends ist das Ganze grösser als ein jeder seiner Theilen insonderheit. Welches das Andere war.

4.) Wenn man zu gleichen Grössen (A und B) gleiche Grössen (C und D) setzet, so sind die Sumen (A + C und B + D) einander gleich.

Beweis.

A + C = A + C (1). und C=D; weil wir es also angenohmen; deswegen kan man D in die Stelle C setzen; nachdem dieses geschehen, wird A + C = A + D. Ubrigens ist B + D = B + D (1). beynebens wird A=B angenohmen; deswegen kan A in die Stelle B gesetzet werden. Geschiehet dieses, so wird B + D = A + D, und daher B + D = A + C (2) W. Z. E.

5. Wenn

5.) Wenn man von gleichen Grössen (C und D) gleiche Grössen (A und B) subtrahiret, so sind die überbliebene Grössen (C − A und D − B) annoch einander gleich.

Beweis.

$C - A = C - A$ [1]. da nun $A = B$ angenohmen wird, so kan in die Stelle A das B gesetzet werden. Nachdem dieses geschehen, wird $C - A = C - B$. Jngleichen $D - B = D - B$ [1], und weil $C = D$ gesetzet worden, so kan C für D angenohmen werden, geschiehet dieses, so wird $D - B = C - B$ deswegen auch $C - A = D - B$ [2] W. Z. E.

6.) Wenn man gleiches (A und B) durch gleiches (m und n) multipliciret, so sind die Producte (m A und n B) annoch einander gleich

Beweis.

Weil $A = B$ angenom̃en worden; so ist auch $A + A = B + B$, oder überhaubt $A + A + A + A$ ꝛc. $= B + B + B + B$ ꝛc. [4] da nun multipliciren nichts anders ist als mehrmahlen nach einander addirrn, so muß wenn m und n die Multiplicante sind $A + A + A + A$ ꝛc. $= m A$ und $B + B + B + B$ ꝛc. $= n B$ seyn; weil aber in dem Falle, wo $A + A + A + A$ ꝛc. $= B + B + B + B$ ꝛc. ist, $m = n$ angenohmen worden, so muß auch $m A = n B$ gehalten werden [2] W. Z. E.

7. Wenn man gleiches (A und B) durch gleiches (C und D) dividiret, so sind die Quotienten (A : C und B : D) einander gleich.

Beweis.

$A : C = A : C$ [1] : da nun $A = B$ angenom̃en worden; so kan in die Stelle A das B gesetzet werden, deswegen ist $A : C = B : C$. Eben aus dieser Ursache ist auch $B : D = B : C$, und dahero ist $A : C = B : D$ [2] W. Z. E.

8. Wenn zwey Grössen (A und B) einander gleich sind, und man beyde zu gleichen Dignitäten (m und n) erhebet, so sind sie einander gleich, das ist $A^m = B^n$.

Beweis.

Zur Dignitäten erheben ist die Grössen in sich selbst multipliciren (P. I. C. 4. §. I.) da nun, wenn man gleiches durch gleiches multipliciret, die Producte annoch einander gleich sind [6] so folget, daß, wenn man zwey gleiche Grössen zu gleichen Dignitäten erhebet, dieselbe annoch einander gleich verbleiben. [1] W. Z. E.

9.) Wenn zwey Grössen einander gleich sind ($A^m = B^n$) und man aus beyden Wurzeln von einerley Grade (m und n) ziehet, so sind auch die Wurzeln (A und B) annoch einander gleich.

Beweis.

Aus gleichen Dignitäten gleicher grössen Wurzeln von einerley Grade ziehen ist eben soviel als gleiche Dignitäten gleicher Grössen mit Wurzeln von einerley Grade dividiren (P. I. C. 5. §. I.); da nun, wenn man gleiches durch gleiches dividiret, die Quotienten annoch einander gleich sind, [7]; so folget, daß, wenn zwey Grössen einander gleich sind, wie $A^m = B^n$, und man aus beyden Wurzeln von einerley Grade (m und n) ziehet, auch die Wurzeln (A und B) welche herausgekommen, einander gleich seyen. W. Z. E.

Die I. Anmerkung.

10.) In dergleichen Beweisen bestehet die Vollkommenheit der Analyseos; denn die meisten Vernunfts-Schlüsse sind also beschaffen, daß ihr vorder-Glied eine Erklärung, das mittel-Glied aber ein identischer oder gleich-lautender Satz ist; deswegen folget der Schluß aus unumstößlichen Gründen unwiedersprechlich; dieses aber ist ein sonnen-klares Zeichen der Vollkommenheit.

Die II. Anmerkung.

11.) Ob nun schon der vielfältige Nutzen dieser Beweisthümer einem jeden der sich nur ein wenig umsiehet, in die Augen fallen sollte; so zweifele ich dennoch gar nicht, es werde einige geben, welche dergleichen Beweise für lächerlich, oder wenigstens für überflüßig nur von darumen ansehen, weil derley Grundsätze so deutlich und klar beschaffen sind, daß sie keinen fernern Beweis nöthig zu haben scheinen. Diese aber, welche also gedenken, wollen wir gebetten haben, ihr Urtheil so lang zu verspahren, bis sie das ganze Werklein mit Bedachtsamkeit gelesen haben; denn solchergestalt bin ich zum Voraus versicheret, es werden dieselbe so dann von dergleichen Vernunfts-Schlüssen ein ganz anderes Urtheil fällen. Jezt begnüge mich hierinnfalls das Exempel grosser Männeren Neutoni, Leibnitii, Wolfii, und anderer, welche dergleichen Beweisthümer über alles hoch schätzeten, nachgeähmet zu haben.

§. III.

Von Beschaffenheit der Aufgaben, und Weise dieselbe durch die Analysin aufzulösen.

12.) Es sind verschiedene Gattungen der Aufgaben: einige werden determinirte, andere undeterminirte, beyde des ersten, oder des anderen, oder des dritten, oder des vierten 2c. Grades genennet, nach Unterscheide der unbekannten Grössen, und ihrer Dignitäten. Determinirte Aufgaben sind, welche nur auf eine, und undeterminirte, welche auf mehrerley Weisen aufgelöset werden können. Von diesen wollen wir jezt, von den anderen aber hernach handeln.

13.) Die Algebraische Aufgaben aufzulösen schreibet der vortreffliche Mathematicus Herr Christian von Wolff in seinen Anfangs-Gründen der Algebra folgende Lehrsätze vor: „Un-

„ Unterscheidet mit Fleiß die bekannten Grössen von den
„ unbekannten, und benennet jenne mit den ersten, diese mit
„ den lezten Buchstaben des Alphabets. Wenn dieses ge-
„ schehen, so suchet eine Gleichung, daß ihr nemlich eine Sache
„ mit zweyerley Nahmen beleget: denn so müssen die beyden
„ Werthe einander gleich seyn. Ihr müsset aber so viel
„ Gleichungen finden, als ihr unbekannte Grössen habet.
„ Wenn es nicht angehet, so ist es ein Zeichen, daß ihr die
„ eine unbekannte Grösse so groß annehmen könnet, als ihr
„ wollet. Und pfleget man dergleichen Aufgaben undetermi-
„ nirte Aufgaben zu nennen. Es sind aber die Gleichungen
„ entweder in der Aufgabe selbst angedeutet, oder ihr müsset
„ sie aus ihren Umständen durch Hülffe derjennigen Lehrsätze
„ suchen, welche von der Gleichheit handeln. Wenn in den
„ Gleichungen bekannte und unbekannte Grössen mit einander
„ vermenget sind, so müsset ihr sie dergestalt einrichten, daß
„ auf einer Seite lauter bekannte, auf der anderen aber nur
„ eine unbekannte stehen bleibet: welches geschiehet, wenn ihr
„ die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren; welche
„ addiret sind, durch subtrahiren; welche andere multipliciren,
„ durch dividiren; welche andere dividiren, durch multiplici-
„ ren wegbringet, oder auch die Wurzeln zu ihren Dignitä-
„ ten erhebet, oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurzeln
„ ausziehet: damit ihr immer eine Gleichheit erhaltet.

§. IV.

Erläuterung über die von dem Herrn von Wolff gegebene Lehrsätze.

14.) Der erste Lehrsatz: Ihr könnet die Grössen, welche subtrahiret sind, durch addiren wegbringen. Das ist, wenn ein unbekannte Grösse mit einer bekannten,

die

die das Minder-Zeichen führet, vermenget ist, dörffet ihr nur die bekannte auf beyden Seiten der Gleichung addiren, so wird die bekannte allein auf ihrer Seite stehen bleiben. Z. E. Wenn ihr die Grösse x in der Gleichung $x - a = b$ bekannt machen wollet, dörffet ihr nur a auf beyden Seiten der Gleichung addiren, so ist die Summe $x - a + a = b + a$; und weil $- a$ und $+ a$ wegen den Mehr- und Minder-Zeichen sich auf der ersten Seite gegen einander aufheben, so kan die Ausdruckung also: $x = b + a$ verbesseret werden. Solchergestalt ist x der Summe $a + b$ gleich, welches bekannte grössen sind, folgends ist x auch selbst bekannt. Daß aber durch dieses addiren, der bekannten Grössen, die Natur der Aufgabe nicht veränderet werde lehret des ersten Capitels §. II. n. 4.

15.) Welche addiret sind, durch subtrahiren. Das ist, wenn auf einer Seite der Gleichung ein unbekannte Grösse mit einer bekannten, die das Mehr-Zeichen führet, vermenget ist, müsset ihr die bekannte, welche addiret worden, subtrahiren. Z. E. Wenn ihr die unbekannte Grösse x in der Gleichung $x + a = b$ auf die andere Seite alleine bringen wollet, dörffet ihr nur das a auf beyden Seiten der Gleichung subtrahiren, so bleibet $x + a - a = b - a$, und nach verbesserter Ausdruckung $x = b - a$ übrig; denn $+ a$ und $- a$ heben sich gegen einander auf. Daß aber dieses subtrahiren der Gleichheit nichts benehme lehret n. 5.

16.) Welche andere dividiren, durch multipliciren. Das ist, wenn ein unbekannte Grösse durch eine oder mehrere bekannte dividiret ist, so könnet ihr durch das multipliciren die unbekannte auf eine Seite bringen; denn, wenn ihr durch den bekannten Theiler beyde Seiten der Gleichung multiplicirет, bleibet nach verbesserter Ausdruckung die unbekannte alleine auf einer Seiten stehen. Z. E. Wenn ihr die unbekannte x in der Gleichung $\frac{x}{a} = b$, erkennen wollet, dörffet ihr nur durch a beyde Seiten multipliciren,

so

so giebet das Product $\frac{ax}{a} = ab$, und nach verbesserter Ausdruckung $x = ab$. desgleichen, wenn ihr $\frac{x}{a+b} = c$ habet, multiplicieret ihr beyde Seiten durch $a+b$, so giebet das Product $\frac{ax+bx}{a+b} = ac+bc$, und nach verbesserter Ausdruckung $x = ac+bc$. der Beweiß davon beruffet sich auf n. 6.

17.) welche andere multipliciren, durch dividiren. Das ist, ihr könnet die unbekannten Grössen durch dividiren bekannt machen, wenn diese durch jenne multiplicirt sind; denn in diesem Falle, wenn ihr beyde Seiten durch den bekannten multiplicatorem dividiret, muß die unbekannte allein auf ihrer Seite stehen bleiben. Z. E. Wenn ihr x in der Gleichung $ax = b$. bekannt machen sollet, müsset ihr beyde Seiten durch den multiplicanten a dividiren, so giebet der Quotient $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, und nach verbesserter Ausdruckung $x = \frac{b}{a}$. Eben also wenn ihr $ax+bx = c$ habet, dörffet ihr nur durch $a+b$ beyde Seiten dividiren, so giebet der Quotient $\frac{ax+bx}{a+b} = \frac{c}{a+b}$, und nach verbesserter Ausdruckung $x = \frac{c}{a+b}$; denn weil der erste Theil ax das x durch a, und der andere bx das x durch b multiplicieret vorstellet, muß $ax+bx$ eben so viel, als $x \times a+b$ seyn; folgends, wenn ihr durch $a+b$ dividiret, so kommet der Quotient $x = \frac{c}{a+b}$ heraus. Den Beweis findet ihr n. 7.

18.) Oder auch die Wurzeln zu ihren Dignitäten erhebet. Das ist, wenn auf einer Seite der Gleichung ein unbekannte Grösse unter einem Wurzel-Zeichen stehet, müsset ihr die bekannte auf der anderen Seite zu der Dignität, welche der Exponente des Wurzel-Zeichens der unbekannten andeutet, erheben; denn solchergestalt wird die unbekannte gleich der Grösse auf der anderen Seite, folgends sie selbst auch bekannt z. E. wenn ihr die unbekannte x in der Gleichung $\sqrt{x} = a$ bekannt machen wollet, müsset ihr beyde Seiten der Gleichung zum Quadrate erheben, so wird $x = a^2$ bekannt; denn $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$; weil ein Wurzel in sich selbst multiplicirer zum Producte ein Quadrat giebet (P. I. C. 6. n. 189.) daß aber hiedurch die Gleichheit erhalten werde lehret n. 8.

19.) Oder aus den Dignitäten die gehörigen Wurzeln ausziehet. Das ist, wenn ihr z. E. x in der Gleichung $x^3 = a^3$ bekannt machen sollet, dörfet ihr nur auf beyden Seiten die Cubic-Wurzel ausziehen, so giebet der Quotient $x = a$. Ingleichen wenn ihr x in der Gleichung $x^4 = abcc$ erkennen wollet, müsset ihr die Wurzel der vierten Dignität aus x^4 ziehen, und für den gesuchten Werthe $x = \sqrt[4]{abcc}$ anschreiben. Dieser Lehrsatz beruhet auf dem n. 9.

20.) Endlich wird eine Gleichung aufgelöset, wenn ihr nemlich eine Sache mit zweyerley Nahmen beleget: Man heisset diese Weise die Gleichungen aufzulösen substitutio: sie hat ihren vielfältigen Nutzen in der Analysi, insonderheit, wenn man zwey Werthe einer Sache hat, und man den einen in die Stelle des anderen setzet. Z. E. Ihr habet die zwo Gleichungen $y = \frac{1}{aa}$ nud $z = \frac{a^3}{y}$; da könnet ihr den Werthe von z zu finden, den Werthe $\frac{1}{aa}$ von y in desselben Selle setzen; so kommet $z = \frac{a^3}{\frac{1}{aa}}$

heraus; Nun werdet ihr annoch von den Brüchen so viel wissen, daß, wenn man ein Ganzes durch einen Bruch dividiren soll, der dividendus durch den Nenner zu multiplieiren, und durch den Zehler 1 zu dividiren sey; weil aber dahier der Zehler 1 ist, und derselbe nicht dividiret, so ist der Quotient a^5; denn a^3 durch aa multiplicirет giebet dem Producte a^5; folgends ist $z=a^5$.

21.) Die Umstände der Aufgabe erforderen schier allezeit, daß man mehrere dergleichen Regeln, bis die Gleichung aufgelöset ist, anbringen soll; wie aus den folgenden Aufgaben zu ersehen seyn wird. Z. E. in der Gleichung $ax=bx+cd$ müsset ihr erst bx subtrahiren, und hernach das übergebliebene $ax-bx=dc$ durch $a-b$ dividiren, so giebet der Quotient $x=\frac{cd}{a-b}$ den gesuchten Werthe von x.

22.) In der Gleichung $dx=x+ab$ subtrahiret ihr erst x; so bleibet $dx-x=ab$ übrig; nun ist aber $dx-x$ eben so viel, als $dx-1$; weil der Coefficient einzeler Grössen Eins ist (P. I. §. IV. n. 15.) folgends müsset ihr hernach durch $d-1$ dividiren; so giebet der Quotient $x=\frac{ab}{d-1}$, welches auch die Gleichung auflöset. In der Gleichung $\frac{a\sqrt{x}+d\sqrt{x}}{a+b}=c$ multiplieiret ihr erst beyde Seiten durch $a+b$; hernach aber wird das Product $a\sqrt{x}+d\sqrt{x}=ac+bc$ durch $a+d$ dividiret, und der Quotient $\sqrt{x}=\frac{ac+bc}{a+d}$ zum Quadrate erhoben; so ist $x=\frac{aacc+2accb+bbcc}{aa+2ad+dd}$; folgends bekannt.

23.)

23.) Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit der Gleichung $\frac{a\sqrt{x}}{b} - \frac{d\sqrt{x}}{c} = f$; da werden erst die Brüche zu einerley Nenneren gebracht; so komet $\frac{ac\sqrt{x} - db\sqrt{x}}{bc}$ f heraus. Hernach werden beyde Seiten durch bc multipliciret, und das Product $ac\sqrt{x} - db\sqrt{x} = bcf$ durch $ac - db$ dividiret; endlich der Quotient $\sqrt{x} = \frac{fbc}{ac - db}$ zum Quadrate erhoben, so wird $x = \frac{ffbbcc}{aacc - 2acdb + ddbb}$

Das Andere Capitel.

Von den determinirten Aufgaben.

§. I.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und ihrem Unterscheide die Grössen selber zu finden.

Aufgabe.

24.) Auf zwey Wägen werden 60. Stuck-Kugeln geführet; ein Wagen hat 10. Kugeln mehr, als der andere. Man fragt wie viel Kugeln auf einem jeden Wagen insonderheit seyen?

Auflösung.

Benennet die Summe der Kugeln $60 = a$; die kleinere Anzahl auf einem Wagen $= z$; die Grössere auf dem anderen $= x$; den Unterscheid $10 = b$; so geben die Bedingnüssen der Aufgabe diese Gleichung

Gleichung: $x + z = a$. Nun werdet ihr wahrnehmen, daß, wenn man den Unterscheid b von der grösseren Zahl der Kugeln $= x$ abziehet, das übergebliebene der kleineren Zahl der Kugeln gleich werde; hingegen, wenn der Unterscheid $10 = b$ zu der kleinern Zahl derselben $= z$ gesetzet wird, sey die Summe gleich der grösseren Zahl der Kugeln; hieraus fliessen diese zwey andere Gleichungen:

$$x - b = z \text{ und } z + b = a$$

Welche durch die Substitution (n. 20.) aufzulösen sind; deswegen dörffet ihr nur den Werthe von z, welcher $x - b$ ist, anstatt z in die Fundamental-Gleichung $x + z = a$ setzen, so kommet $x + x - b = a$, und nach verbesserter Ausdruckung $2x - b = a$ heraus. Addiret (n. 15.) den bekannten Unterscheid $= b$, so ist die Summe $2x - b + b = a + b$, und nach verbesserter Ausdruckung $2x = a + b$; weil $-b$ und $+b$ einander aufheben:

$$2x - b = a$$
$$2x = a + b$$
$$x = \frac{a + b}{2}$$

Jetzt wisset ihr den Werthe von $2x$; dannenhero dörffet ihr nur beyde Seiten der Gleichung $2x = a + b$ durch 2 dividiren (17), und die Ausdruckung $\frac{2x}{2} = \frac{a + b}{2}$ verbesseren, so wird euch auch

$x = \frac{a + b}{2}$ allein bekannt, und dadurch die Aufgabe aufgelöset; denn setzet in die Stelle der Buchstaben ihre Werthe, da findet ihr, daß, weil $x = \frac{60 + 10}{2} = \frac{70}{2} = 35$ vorstellet, die Anzahl der sich auf dem einen Wagen befindlichen Kugeln 35, und die auf dem anderen 25 seyn müsse.

Probe

Denn $35 + 25 = 60$; und $35 - 10 = 25$. W. Z. E.

Anmerkung.

25.) Nun, weil die Algebra ein Mutter aller Regeln der gemeinen Zahl-Rechnung ist, und man aus derselben Gleichungen allezeit allgemeine Lehrsätze haben kan, in Ansehung, daß x und z ein jede Grösse nach belieben, davon die Summe a und der Unterscheid b bekannt sind, anzeigen können; wollen wir auch aus der Gleichung $x = \frac{a + b}{2}$ einen allgemeinen Lehrsatz ausziehen; da werdet ihr aber selbst schliessen: Wenn die Summe zweyer ungleichen Grössen samt ihrem Unterscheide gegeben wird, so ist die grössere Zahl gleich der helfte der Summe, und der helfte des Unterscheides; hingegen ist die kleinere gleich der Summe nach abgezogener helfte des Unterscheides. Dieser Lehrsatz kan in vielen Fällen mit grossem Vortheile angebracht werden.

§. II.

Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und dem Producte einer Zahl in die andere, die Zahlen selber zu finden.

Aufgabe.

26.) Zwey Freunde haben in einen gemeinen Beutel 100. gulden gelegt; die beyde Einlagen in einander multipliciret, geben 2400. fl. man fragt nach der Einlage eines jeden insonderheit.

Auf-

Auflösung.

Es sey die Summe 100 = 2a. die unbekannte Differenz = 2z. Ich bediene mich dieser Ausdruckung die Brüche der helfte zu vermeyden. Ferner sey das Product 2400 fl. = b. so ist die grössere Zahl a + z und die kleinere a − z. Wenn ihr jezt beyde a + z und a − z durch einander multipliciret, so kommet im Producte aa − zz heraus; da nun dieses 2400. fl. ausmacht, diese aber = b sind, so fliesset daher die erste Fundamental-Gleichung: aa − zz = b. Die Operation stehet wie dahier:

$$\begin{array}{l} a + z \\ a - z \\ \hline aa + az \\ \quad - az - zz \\ \hline aa - zz = b \\ \hline aa - zz + zz = b + zz \\ \hline aa = b + zz \\ \hline aa - b = zz \\ \hline \sqrt{zz} = \sqrt{aa - b}. \\ \hline z = \sqrt{aa - b}. \end{array}$$

Addiret [n. 14.] auf beyden Seiten der Gleichung (zz), von der Summe ($aa = b + zz$) subtrahiret [n. 15.] das (b) und ziehet aus dem übergebliebenen ($aa - b = zz$) die quadrat Wurzel [n. 19.] so komet ($z = \sqrt{aa - b}$) heraus, und wird dadurch die Aufgabe

 auf-

aufgelöset; denn setzet in die Stelle der Buchstaben ihren Werth; so ist $z = \sqrt{2500 - 2400} = \sqrt{100} = 10$. folgends die Einlag des ersten $a + z = 50 + 10 = 60$. und des anderen $a - z = 50 - 10 = 40$. W. Z. Th.

Probe.

Den $40 + 60 = 100$. und $60 \times 40 = 2400$. W. Z. E.

Anmerkung.

27.) Es ist an der Benennung öffters viel gelegen; denn, wenn ihr in gegenwärtiger Aufgabe die grosse Zahl x, die kleine y, oder wie der Herr von Wolf die halbe differenz x, und die Sume a nennet: kommet ihr auf eine Gleichung, die ihr noch nicht aufzulösen vermögend seyd. Merket dabey den Lehrsatz, den euch die Gleichung $z = \sqrt{aa - b}$ an die Hand giebt: das Quadrat der halben Summe zweyer grössen ist gleich dem Producte derselben in einander, und dem Quadrate des halben Unterscheides.

§. III.

Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen, und ihrer Differenz die Grössen selber zu finden.

Aufgabe.

28.) Es sind zwey eiserne Kugeln, davon wieget die eine 4. pfund mehr als die andere, die Zahlen ihrer beyden Pfund in einander multiplicieret, geben 192. pfund. man fragt, wie schwer ein jede insonderheit seye? Das

Das Product 192 = b; die Differenz 4 = 2a; die unbekannte Summe = 2z. so ist z + a das Gewichte der einen, und z − a der anderen Kugel. Nach geschehener Multiplication einer in die andere:

$$\begin{array}{l} z + a \\ z - a \\ \hline zz + za \\ \quad - za - aa \\ \hline zz \quad * - aa \text{ product} \end{array}$$

komet in dem Producte zz − aa heraus. Da nun dieses dem b gleichet, so habet ihr die Fundamental-Gleichung zz − aa = b gefunden, in welcher ihr nur aa auf beyden Seiten addiren [n. 14.] und aus der Summe zz = b + aa die Quadrat-Wurzel [n. 19.] ziehen dörffet, so wird durch $z = \sqrt{b + aa}$ die Aufgabe aufgelöset, wie aus der folgenden Operation zu ersehen:

$$\begin{array}{c} zz - aa = b \\ \hline zz = b + aa \\ \hline z = \sqrt{b + aa} \end{array}$$

Setzet in die Stelle der Buchstaben ihre Werthe, so wird $z = \sqrt{192 + 4} = \sqrt{196} = 14$. folgends hat die eine Kugel z − a = 14 − 2 = 12, und die andere z + a = 14 + 2 = 16 pfund gewogen, welches auch die Aufgabe auflöset.

Probe.

Den 16. 12 = 192 und 16 − 12 = 4. W. Z. E.

§. IV.

§. IV.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Summe ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Aufgabe.

29.) Zwey Persohnen haben unter sich 18 fl. dergestalt zu ungleichen Theilen getheilet, daß das Quadrat beyder Antheilen die Summe 164 ausmachet. Es ist die Frage nach eines jeden Antheil?

Auflösung.

Es sey die Summe $18 = 2a$, die unbekannte Differenz $= 2y$, die Summe $164 = 2b$. da ist der Antheil des ersten $a + y$ und der anderen $a - y$ erhebet beyde Antheile zu ihren Quadraten.

$$\begin{array}{ll} a + y & a - y \\ a + y & a - y \\ \hline aa + ay & aa - ay \\ \quad + ay + yy & \quad - ay + yy \\ \hline aa + 2ay + yy & aa - 2ay + yy. \end{array}$$

addiret beyde quadrate zusamen:
$$\begin{array}{l} aa + 2ay + yy \\ aa - 2ay + yy \\ \hline 2aa \quad * \quad + 2yy \end{array}$$

So ist ihre Summe $2aa + 2yy$ gleich $164 = 2b$. heraus fliesset nach den Bedingnissen der Aufgabe diese Gleichung.

2aa

$$2aa + 2yy = 2b$$
$$2yy = 2b - 2aa$$
$$yy = \frac{2b - 2aa}{2}$$
$$yy = b - aa$$
$$y = \sqrt{b - aa}$$

In welcher ihr nur 2aa [n. 15.] subtrahiren, das übergebliebene $2yy = 2b - 2aa$ durch [2] dividiren [n. 17.] und aus dem Quotiente $yy = b - aa$ die Quadrat-Wurzel [n. 19.] ausziehen dörffet, so wird durch $y = \sqrt{b - aa}$ der Aufgabe genug gethan. Denn setzet in die Stelle der Buchstaben ihre Werthe, so ist $y = \sqrt{82 - 81} = 1$, und daher bekommet die erste Persohn $a + y = 9 + 1 = 10$; hingegen die andere $a - y = 9 - 1 = 8$. W. Z. Th.

Probe.

Denn $8 . 8 = 64$, und $10 . 10 = 100$. ferners ist $64 + 100 = 164$, und die Summe $10 + 8 = 18$. W. Z. E.

§. V.

Aus der gegebenen Differenz zweyer Grössen, und der Summe ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Aufgabe.

30.) Ihrer zwey sollen eine gewisse Summe Geldes also theilen, daß der andere 2. fl. mehr als der erste bekommet, und daß das Quadrat beyder Antheilen 164 giebet. Es ist die Frage noch eines jeden Antheil? D Auf-

Auflösung.

Es sey die gegebene Differenz 2 = 2 a, die Summe der Quadraten 164 = 2 b, die unbekannte Summe = 2 y so ist der Antheil des ersten y − a, und des anderen y + a. Davon sind die Quadrate: yy + 2ay + aa und yy − 2ay + aa; deren Sume giebet 2yy + 2aa. daraus fliesset diese Gleichung:

$$2yy + 2aa = 2b$$
$$2yy = 2b - 2aa$$
$$yy = b - aa$$
$$y = \sqrt{b - aa}$$

In welcher ihr nur 2aa subtrahiren [n. 15.] das übergebliebene 2yy = 2b − 2aa durch 2 dividiren [n. 17.] und aus dem Quotiente yy = b − aa die Quadrat-Wurzel [n. 19.] ziehen dörffet, so wird $y = \sqrt{b - aa}$ geben, was ihr verlanget; denn setzet die Zifferen in die Stelle der Buchstaben, so ist $y = \sqrt{82 - 1} = \sqrt{81} = 9$. folgends der Antheil des ersten y − a = 9 − 1 = 8, und des anderen y + a = 9 + 1 = 10.

Probe.

Denn 10 + 8 = 18, und 10 − 8 = 2. Ferners ist 10. 10 = 100, und 8. 8 = 64. ingleichen 100 + 64 = 164.

§. VI.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und der Differenz ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Auf-

Aufgabe.

31.) Zwey Persohnen haben zu ungleichen Theilen 18 fl. dergestalt unter sich getheilet, daß der Unterscheid der Quadraten ihrer Antheilen 36 ausmachet. Man verlangt eines jeden Antheil zu wissen.

Es sey die Summe $18 = 2a$, ihre Differenz $= 2z$, der Unterscheid der Quadraten $36 = 2b$. So hat die erste $a + z$, und die andere $a - z$, davon sind die Quadrate $aa + 2az + zz$ und $aa - 2az + zz$. deren Unterscheid ist $4az$; da nun dieser $36 = 2b$ gleichet, so bekommet ihr daher diese Gleichung: $4az = 2b$

$$z = \frac{2b}{4a} = \frac{b}{2a}$$

welche ihr nur durch $4a$ dividiren [n. 17.] und die Ausdruckung verbesseren dörffet, so ist $z = \frac{b}{2a}$ der gesuchte Werth von z. den setzet Zifferen in die Stelle der Buchstaben, so wird $z = \frac{36}{36} = 1$. folgends gebühret der ersten $a + z = 9 + 1 = 10$, und der anderen $a - z = 9 - 1 = 8$.

Probe

Denn $10 + 8 = 18$, und $100 - 64 = 36$. W. Z. Th.

§. VII.

Aus der gegebenen Differenz zweyer Grössen, und dem Unterscheide ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Aufgabe.

32.) Ihrer zwey sollen eine gewisse Sum̃e Geldes also theilen, daß der erste 2. fl. mehr als der andere bekom̃et, und die Quadrate ihrer Antheilen um 36. von einander unterschieden sind. Es ist die Frage nach eines jeden Antheil?

Auflösung.

Es sey die unbekannte Summe beyder Antheilen $2z$, ihr Unterscheid $2=2a$, und die Differenz der Quadraten $36=2b$. so ist der Antheil des ersten $z+a$, und des anderen $z-a$; davon sind die Quadrate $zz+2za+aa$, und $zz-2za+aa$, deren Unterscheid aber $4za$. da nun dieser $36=2b$ gleichet, so fliesset hieraus diese Gleichung: $4za=2b$

$$z=\frac{2b}{4a}=\frac{b}{2a}$$

Welche ihr nur durch $4a$ dividiren [n. 17.] dörffet, so ist $z=\frac{2b}{4a}=\frac{b}{2a}$ bekannt; denn setzet in die Stelle der Buchstaben die Zifferen, so wird $z=\frac{36}{4}=\frac{18}{2}=9$ folgends $z+a=9+1=10$ der Antheil des ersten, und $z-a=9-1=8$ des anderen. W.Z.Th.

Probe.

Denn $10-8=2$, und $100-64=36$. W. Z. E.

§. VIII.

Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen, und der Summe ihrer Quadrate die beyden Grössen zu finden.

Auf-

Aufgabe.

33.) Zwey Spieler haben ein gewisse Summe Geldes gewonnen; der Gewinn des ersten multiplicieret durch den Gewinne, des anderen giebet dem Producte 96 fl. und wenn man beyde Gewinne zum quadrate erhebet, ist ihre Sume 208. fl. es ist die Frage nach eines jeden Gewinne?

Auflösung.

Es sey die unbekannte Sume $= 2x$, die Differenz $= 2z$, das Producte $96 = a$, die Summe der quadraten $208 = 2b$. so ist der Gewinn des ersten $x + z$, und des anderen $x - z$. davon sind die quadrate $xx + 2xz + zz$, und $xx - 2xz + zz$, deren Sume aber $2xx + 2zz$ da nun diese nach den Bedingnissen der Aufgabe $2b$ gleichet, so fliesset daher diese Gleichung:

$$2xx + 2zz = 2b$$
$$2zz = 2b - 2xx$$
$$zz = b - xx$$ der erste Werth von zz

In welcher ihr nur $2xx$ subtrahiren [n. 15.] und das übergebliebene $2zz = 2b - 2zx$ durch 2 dividiren dörffet; so komet im quotiente $zz = b - xx$ der erste Werth von zz heraus, und wird dadurch die erste Bedingniß der Aufgabe erfüllet. Damit ihr aber auf gleiche Weise auch die andere erfüllet, so müsset ihr $x + z$ durch $x - z$ multipliciren; denn solchergestalt, weil das Producte, welches herauskomet, dem a gleichet, erlanget ihr noch diese andere Gleichung:

$$xx - zz = a$$
$$xx = a + zz$$
$$xx - a = zz$$ der andere Werth von zz

In welcher ihr nur auf beyden Seiten zz addiren [n. 14.] von der

Sume aber das a subtrahiren [n. 15.] dörffet, so komet der andere Werth von zz heraus. Da nun eine Gleichung aufgelöset wird, wenn man eine Sache mit zweyerley Nahmen beleget [n. 20.] so setzet in die Gleichung $zz = b - xx$ anstatt zz desselben Werth $xx - a$; solchergestalt wird die Gleichung $zz = b - xx$ in diese $xx - a = b - xx$ verwandelt; in welcher ihr nur noch eine unbekannte vorhanden habet:

$$xx - a = b - xx$$
$$xx = b + a - xx$$
$$xx + xx = b + a$$
$$2xx = b + a$$
$$xx = \frac{b + a}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{b + a}{2}}$$

Deswegen dörffet ihr nur xx und a auf beyden Seiten addiren [n. 14.] die Sume, $2xx = b + a$ durch 2 dividiren, und aus dem quotiente $xx = b + a$ die quadrat-Wurzel ziehen, so wird $x = \sqrt{\frac{104 + 96}{2}} = \sqrt{\frac{200}{2}} = \sqrt{100} = 10$, und daher ist $zz = xx - a = 100 - 96 = 4$ folgends $z = 2$. Der Gewinn des ersten ist $x + z = 10 + 2 = 12$. und des anderen $x - z = 10 - 2 = 8$. Denn $12 . 8 = 96$, und $12 . 12 = 144$. ferners ist $8 . 8 = 64$, und $144 + 64 = 208$. W. Z. Th.

§. IX.

Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen, und der Differenz ihrer Quadrate, die beyden Grössen zu finden.

Auf-

Aufgabe.

34.) Zwey Spieler haben ein gewisse Summe Geldes verlohren; der Verlurste des ersten multiplicirret durch den Verlurste des anderen giebet im Producte 96. fl. und wenn man beyde Antheile zum quadrate erhebet, ist ihr Unterscheid 80 fl. Man fragt, wie viel ein jeder verlohren habe?

Auflösung.

Es sey die unbekannte Summe $=2x$, die Differenz $=2z$, das Product $96=a$, und der Unterscheid der quadraten $80=2b$. So ist nach den Bedingnissen der Aufgabe der Verlurst des ersten $x+z$, und des anderen $x-z$. das Producte $xx-zz$. da nun dieses $96=a$ gleichet, so fliesset daher diese Gleichung: $xx-zz=a$

$$xx=a+zz$$

In welcher ihr nur zz auf beyden Seiten addiren dörffet, so habet ihr schon den ersten Werth von $xx=a+zz$, und zugleich die erste Bedingnis der Aufgabe erfüllet; die andere wird erfüllet, wenn man die beyden Verlurste zu ihren quadraten erhebet, eines von dem anderen subtrahiret, und diese Gleichung: $4xz=2b$ setzet; denn das quadrate des einen ist $xx+2xz+zz$ und des anderen $xx-2xz+zz$; diese sind um $4xz$ von einander unterschieden, und derselben Unterscheide ist nach den Bedingnissen der Aufgabe gleich $80=2b$. erhebet $4xz=2b$ zum quadrate

$$4xz=2b$$
$$4xz=2b$$
$$16xxzz=4bb$$
$$4xxzz=bb$$

und dividiret $16xxzz=4bb$ durch 4, zu dem quotiente $4xxzz=bb$ addiret das quadrate $x^4-2xxzz+z^4=aa$ der Gleichung $xx-zz=a$; ziehet aus der Sume $x^4+2xxzz+z^4=aa+bb$

die

die quadrat-Wurzel, von dem quotiente $xx + zz = \sqrt{aa + bb}$ subtrahiret zz, so bleibet der andere Werth von $xx = \sqrt{aa + bb} - zz$ übrig.

$$
\begin{array}{l}
xx - zz = a \\
xx - zz = a \\
\hline
x^4 - xxzz \\
\quad - xxzz + z^4 = aa \\
\hline
x^4 - 2xxzz + z^4 = aa \\
\quad + 4xxzz \qquad = bb \\
\hline
x^4 + 2xxzz + z^4 = aa + bb \\
\hline
xx + zz = \sqrt{aa + bb} \\
xx = \sqrt{aa + bb} - zz
\end{array}
$$

Setzet in die Stelle xx desselben erstens gefundenen Werthe $a + zz$; zu der Gleichung $a + zz = \sqrt{aa + bb} - zz$ addiret zz, von der Sume $a + 2zz = \sqrt{aa + bb}$ subtrahiret das a, dividiret das übergebliebene $2zz = - a + \sqrt{aa + bb}$ durch 2, und ziehet aus dem quotient $zz = - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + bb}$ die quadrat-Wurzel, so wird $z = \sqrt{- \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + bb}}$ endlich bekannt. Denn setzete in der Stelle der Buchstaben ihre Werthe, so ist $z = \sqrt{- \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{aa + bb}} = \sqrt{- 48 + \frac{1}{2}\sqrt{9216 + 1600}} = \sqrt{- 48 + 52} = \sqrt{4} = z$ und $xx = \sqrt{aa + bb} - zz =$

$\sqrt{104-4}=\sqrt{100}=10$. wie aus der nachstehenden Operation zu ersehen:

$$a+zz=\sqrt{aa+bb}-zz$$

$$a-a+2zz=-a+\sqrt{aa+bb}$$

$$2zz=-a+\sqrt{aa+bb}$$

$$z=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{aa+bb}}$$

Folgends ist der Verlurste des ersten $x+z=10+2=12$, und des anderen $x-z=10-2=8$.

Probe.

Denn $8.12=96$, und $144-64=80$.

Anmerkung.

35.) Diese Weise, dadurch die unbekannte dahier gefunden worden, kan in vielen Fällen mit grossem Vortheile angebracht werden. Sie bestehet aber hauptsächlich darinnen, daß man, nachdem beyde Gleichungen $xx-zz=a$, und $4xz=2b$ (deren eine den Werth der Producten beyder Verlursten, und die andere den Unterscheid der Quadraten andeutet) gefunden worden, alles zum Quadrate erhebe, und in eine Sum̃e bringe; denn solchergestalt wird dieselbe zu einem vollkom̃enen Quadrate gemacht, daraus die gezogene Wurzel den zweyten Werth der unbekannten xx offenbahret. Ubrigens wird alles beobachtet, was wir §. III. Cap. I. angeführet haben.

§. X.

Aus dem gegebenen Producte zweyer Grössen, und der Differenz ihrer Cubic-Zahlen die beyden Grössen zu finden.

Aufgabe.

36.) Zwey Freunde haben mit einander ein gewisse Summe Geldes dergestalt getheilet; daß der Antheil des einen durch den Antheile des anderen multiplicirt zum Producte 54 fl. giebet; und wenn man den Cubum beyder Antheilen machet, ihre Differenz 513 betrage. Es ist die Frage nach eines jeden Antheil?

Auflösung.

Es sey die unbekannte Sume der Antheilen $= 2z$, ihr Unterscheid $= 2y$, das Product $= 54 = b$, die Differenz der Cubic-Zahlen $513 = 2c$. da ist der Antheil des einen $z + y$, und des anderen $z - y$; multipliciret beyde in einander:

$$\begin{array}{r} z + y \\ z - y \\ \hline zz + zy \\ - zy - yy \\ \hline zz - yy \end{array}$$

So flüsset aus dem Producte $zz - yy = b$ die erste Gleichung. Hingegen wenn ihr beyde Antheile zu ihrer dritten Dignität erhebet:

$z^3 + 3z^2y + 3zy^2 + y^3$	Cubus des ersten
$z^3 - 3z^2y + 3zy^2 - y^3$	Cubus des anderen
$* \quad 6z^2y \quad * \quad 2y^3$	Unterscheid

So fliesset aus dem Unterscheide, weil derselbe 2c gleichet, diese andere Gleichung: $6z^2y + 2y^3 = 2c$. welche ihr durch 2 dividiret; denn solchergestalt komet in dem Quotiente $3z^2y + y^3 = c$ heraus; wie aus der folgenden Operation erhellet:

$6z^2y + 2y^3 = 2c$ die andere Bedingnus

$3z^2y + y^3 = c$ dividiret durch 2

$$z^6 - 3z^4yy + 3zzy^4 - y^6 = b^3$$
$$+ 9z^4yy + 6zzy^4 + y^6 = cc$$

$$z^6 + 6z^4yy + 9zzy^4 = b^3 + cc$$

$$z^3 + 3zyy = \sqrt{b^3 + cc}$$

$$z^3 + 3z^2y + 3zyy + y^3 = c + \sqrt{b^3 + cc}$$

$$z + y = \sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + cc}}$$ Antheil des ersten

b

$$z - y = \sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + cc}}$$ des anderen

$$z + y = \sqrt[3]{256\tfrac{1}{2} + \sqrt{157464 + 65792\tfrac{1}{4}}} = \sqrt[3]{256\tfrac{1}{2} + 472\tfrac{1}{2}} = \sqrt[3]{729} = 9$$

54

$$z - y = \sqrt{256\tfrac{1}{2} + \sqrt{157464 + 65792\tfrac{1}{2}}} = \frac{54}{9} = 6.$$

Wenn ihr beyde Gleichungen: $zz - yy = b$, und $3z^2y + y^3 = c$ gegen einander vergleichet, müsset ihr die Sache dergestalt einrichten, daß beyde Gleichungen zu einerley Grade der Dignitäten erhoben werden, das ist, daß die unbekannte z in der ersten, und y in

in der anderen in einem Grade übereinkom̃en; dieses geschiehet, wenn ihr die erste zu der dritten Dignität, und die andere zum quadrate erhebet; denn solchergestalt kom̃t z^6 anstatt z, und y^6 anstatt y, folgends zwey Gleichungen eines Grades heraus. Addiret beyde Gleichungen, so kommet eine neue Gleichung heraus, welche ein vollkom̃enes Quadrate, daraus die Wurzel $z^3 + 3zyy = \sqrt{b^3 + cc}$ ist, vorstellet. Demnach könnet ihr diese Wurzel zu der anderen aus der zweyten Bedingniß gezogenen Gleichung: $3zzy + y^3 = c$ addiren; denn solchergestalt bekom̃et ihr eine Gleichung: $z^3 + {}^3z^2y + 3zy^2 + y^3 = c + \sqrt{b^3 + cc}$, in welcher das erste Glied ein vollkom̃ener Cubus ist; deswegen dörffet ihr nur die Cubic-Wurzel ausziehen, so habet ihr $z + y = \sqrt[3]{c + \sqrt{b3 + cc}}$ den Antheil des ersten. Wollet ihr nun auch den Antheil des anderen finden, so müsset ihr die Gleichung $zz - yy = b$, dadurch die erste Bedingniß der Aufgabe vorgestellet wird, zu handen nehmen, und durch $z + y = \sqrt[3]{c + \sqrt{b + cc}}$ dividiren, das ist, ihr müsset die unbekannte Seiten durch die unbekannten dividiren; denn solchergestalt giebet der quotient $z - y = \sqrt[3]{c + \sqrt{b^3 + cc}}$ den Antheil des anderen. Demnach setzet in die Stelle der Buchstaben die gehörigen Zifferen, wie in der Operation zu ersehen, so bekom̃et einer $z + y = 9$, und der andere $z - y = 6$.

Probe.

Denn $6 + 9 = 15$, und $6.9 = 54$. ferners ist $729 - 216 = 513$. W. Z. Th. und Z. E.

§. XI.

§. XI.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen multipliciret durch die Summe ihrer Quadraten; und der Differenz eben dieser Grössen multipliciret durch die Differenz ihrer Quadraten, die beyden Grössen zu finden.

Aufgabe.

37.) Zwey Soldaten haben unter sich ein gewisse Sume Geldes solchermassen getheilet, daß die Sume beyder Antheilen durch die Sume ihrer quadraten multipliciret, der Jahr-Zahl 1755 gleichet, und daß der Unterscheid eben dieser Antheilen durch den Unterscheide ihrer quadraten multipliciret nur 135. betraget. Es ist die Frage nach eines jeden Antheil?

Auflösung.

Es sey die unbekañte Sume der Antheilen $= 2z$, ihr Unterscheid $= 2y$, das Product $1755 = 4b$, und das andere $135 = 8c$. Da ist der Antheil des einen $z + y$, und des anderen $z - y$. Davon sind die quadrate $zz + 2zy + yy$ und $zz - 2zy + yy$, deren Sume aber $2zz + 2y^2$; hingegen ist das Product durch $2z$ in die Sume beyder Antheilen $4z^3 + 4zy^2$.

Aus den Umständen der Aufgabe, weil nemlich die Sume der quadraten durch die Sume beyder Antheilen multipliciret der Jahr-Zahl $1755 = 4b$ gleichet, fliesset diese Gleichung $4z^3 + 4zy^2 = 4b$

$$z^3 + zy^2 = b$$

welche ihr durch 4 dividiren könnet, damit der Coefficiente 4 von dem ersten Gliede abgeschaffet werde; da giebet der quotient $z^3 + zyy = b$. Wenn ihr jezt das andere quadrat von dem ersten abziehet, und den Unterscheid $4zy$ durch den Unterscheid $2y$ der beyden Antheilen multipliciret, so komet im Producte $8zy^2$ heraus; da nun dieses

nach der zweyten Bedingniß der Aufgabe 135 = 8 c gleichet, so fliesset daher diese Gleichung: $8zy^2 = 8c$

$$zy^2 = c$$

Welche ihr durch 8, damit der Coefficiente 8 von dem ersten Gliede weggebracht werde, dividiren könnet; denn solchergestalt giebet der quotient $zy^2 = c$. Wollet ihr nun den Werthe von z finden, so müsset ihr die Gleichung $zy^2 = c$ von $z^3 + zy^2 = b$ ab- und aus dem übergebliebenen $z^3 = b - c$ die Cubic-Wurzel ausziehen, da wird euch $z = \sqrt[3]{b - c} = 7\frac{1}{2}$ bekannt:

$$z^3 + zy^2 = b$$
$$zy^2 = c$$
$$z^3 \quad * = b - c$$
$$z = \sqrt[3]{b - c}$$
$$z = \sqrt[3]{438\tfrac{3}{4} - 16\tfrac{7}{8}} = \sqrt{421\tfrac{7}{8}} = \sqrt{\frac{3375}{8}} = \frac{15}{2} = 7\tfrac{1}{2}.$$

Damit ihr jezt auch den Werth von y findet, könnet ihr in die Gleichung $zy^2 = c$ an die Stelle z desselben Werthe $7\frac{1}{2}$ setzen; hernach aber die verwandelte Gleichung $7\frac{1}{7}y^2 = c$ durch $7\frac{1}{2}$ dividiren, und aus dem quotiente $y^2 = \frac{c}{7\frac{1}{2}}$ die quadrat-Wurzel ausziehen; wenn dieses geschiehet, so ist $y = \sqrt{\frac{c}{7\frac{1}{2}}} = 1\frac{1}{2}$. wie aus der folgenden Operation zu ersehen:

$$zy^2 = c$$
$$7\tfrac{1}{2}y^2 = c$$
$$y^2 = \frac{c}{7\frac{1}{2}}$$

y =

$$y = \sqrt{\frac{c}{7\frac{1}{2}}}$$

$$y = \sqrt{\frac{16\frac{7}{8}}{7\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{16\frac{7}{8}}{7\frac{4}{8}}} = \sqrt{\frac{135}{60}} = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$$

Dannenhero ist der Antheil des ersten $z + y = 7\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 9.$ und des anderen $z - y = 7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 6.$

Probe.

Denn $6 + 9 = 15$, und $15 . 117 = 1755.$ hingegen $45 . 3 = 135$; anerwogen $9 - 6 = 3$, und $81 - 36 = 45.$

§. XII.

Es wird gegeben die Summe gleicher Dignitäten zweyer Grössen, und der Unterscheide selbiger Dignitäten, ihr sollet die Grossen selbst finden.

Aufgabe.

34.) Zwey Soldaten haben von ihrem Feld-Obrist ein gewisses Geschencke empfangen: wenn ihr beyde Antheile besonders zur fünften Potenz erhebet, und in eine Summe bringet, so ist dieselbe 6495392, und der Unterscheid deren Dignitäten 6377294. Man fragt nach eines jeden Antheil.

Auflösung.

Es sey die gegebene Summe $6495392 = a$, der Unterscheid $6377294 = b$. der Antheil des einen $= x$, und des anderen $= y$.

So

So ist $x^5 + y^5 = a$ und $y^5 - x^5 = b$

$$y^5 = a - x^5 \qquad y^5 = b + x^5$$

$$a - x^5 = b + x^5$$

$$a = b + 2x^5$$

$$a - b = 2x^5$$

$$\frac{a - b}{2} = x^5$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{a-b}{2}}$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{6495392 - 6377294}{2}} = \sqrt[5]{\frac{118098}{2}} = \sqrt[5]{59049} = 9.$$

Folgends ist $y^5 = b + x^5 = 6377294 + 59049 = 6436343$ und $y = \sqrt[5]{6436343} = 23.$

Dannenhero dörffet ihr nur in die Stelle y^5 sein Werthe $a - x^5$ in die Gleichung $y^5 = b + x^5$ übertragen, zu der Summe $a - x^5 = b + x^5$ noch einmahl x^5 addiren, und von dieser Summe $a = b + 2x^5$ das b subtrahiren, hernach aber das übergebliebene $a - b = 2x^5$ durch 2 dividiren, und endlich aus dem quotiente $x^5 = \frac{a-b}{2}$ die Wurzel der fünften Dignität ausziehen, so findet ihr durch $x = \sqrt[5]{\frac{a-b}{2}}$, was man verlanget. Wie aus der Operation erhellet.

Probe.

Probe.

Denn $\sqrt[5]{59049}=9$ und $\sqrt[5]{6436343}=23$. ferners ist $6436343+59049=6495392$. hingegen ist $6436343-59049=6377294$. W. Z. E.

§. XIII.

Aus dem gegebenen Übermaß dreyer Grössen gegen einer vierten, und derselben Vergleichung mit einander, die Grössen selber, und ihre gantze Sume zu finden.

Aufgabe.

39.) Vier Persohnen haben auf einer Reise ein gewisse Sume Geldes verzehret: die drey ersten haben mit einander 10 fl. mehr als die vierte; die erste, andere, und vierte 12 fl. mehr als die dritte; die erste, dritte, und vierte 14 fl. mehr als die andere; und endlich die drey lezteren zusamen 16 fl. mehr als die erste verzehret. Man fragt, was ein jede Persohn insonderheit, und alle mit einander verzehret haben?

Auflösung.

Es sey $10=a$, $12=b$, $14=c$, $16=d$, und die Ausgabe des ersten $=x$
des anderen $=y$
dritten $=z$
vierten $=v$

Aus den Bedingnissen der Aufgabe fliessen diese 4 Gleichungen:

$$x+y+z=v+a$$
$$x+y+v=z+b$$
$$x+z+v=y+c$$
$$y+z+v=x+d$$

$$3x+3y+3z+3v=x+y+z+v+a+b+c+d,$$

Welche ihr in eine Suñe bringen, und davon $x + y + z + v$ subtrahiren, das übergebliebene aber $2x + 2y + 2z + 2v = a + b + c + d$ durch 2 dividiren müsset; denn solchergestalt wird aus dem Quotiente $x + y + z + v = \frac{a + b + c + d}{2}$ bald klar, daß die Suñe der ganzen Ausgabe gleich sey der helffte der Suñe aller Unterscheiden.

$$3x + 3y + 3z + 3v - x - y - z - v = a + b + c + d$$
$$2x + 2y + 2z + 2v = a + b + c + d$$
$$x + y + z + v = \frac{a + b + c + d}{2}$$

Wenn ihr jezt die besonderen Ausgaben einer jeden Persohn zu wissen verlanget; so könnet ihr mehrer Bequemlichkeit halben die helfte der Summe der Unterscheiden $= f$ machen, und in die Stelle $\frac{a + b + c + d}{2}$ nur f in die Gleichung $x + y + z + v$ setzen; denn solchergestalt wird $x + y + z + v = f$ die erste Fundamental-Gleichung:

$$x + y + z + v = f$$
$$x = f - y - z - v$$
$$x = f - x - d$$
$$x + x = f - d$$
$$2x = f - d$$
$$x = \frac{f - d}{2}$$

In welcher ihr nur $y + z + v$ subtrahiren, und, weil nach Anzeige der vierten Fundamental-Gleichung, die ihr oben gefunden, $z + y + v = x + d$ ist, in die Stelle $y - z - v$ ihren Werthe $x - d$ setzen dörffet, so komet $x = f - x - d$ heraus. Demnach addiret x, und dividiret die Summe $2x = f - d$ durch 2, so findet ihr in dem Quotiente $= \frac{f - d}{2}$ die Ausgabe der ersten Persohn.

Auf

Auf gleiche Weise werden auch die Ausgaben der übrigen Persohnen gefunden; denn ihr dörffet nur allezeit in die Stelle der drey unbekannten ihren Werthe aus den 4. vorhergehenden Fundamental-Gleichungen ansetzen, und nach dieser lezteren Formul euere Operation vollenden; wie dahier zu ersehen:

$$x + y + z + v = s$$
$$y = s - x - z - v$$
$$y = s - y - c$$
$$2y = s - c$$
$$y = \frac{s - c}{2}$$ die Ausgabe der anderen

$$x + y + z + v = s$$
$$z = s - x - y - v$$
$$z = s - z - b$$
$$2z = s - b$$
$$z = \frac{s - b}{2}$$ die Ausgabe der dritten

$$x + y + z + v = s$$
$$v = s - x - y - z$$
$$v = s - x - y - z$$
$$2v = s - a$$
$$v = \frac{s - a}{2}$$ die Ausgabe der vierten

Denn setzet in die Stelle der Buchstaben die Ziffern, so ist $s = \frac{a + b + c + d}{2} = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$ fl. hingegen ist

$x = \frac{s - d}{2} = \frac{26 - 16}{2} = 13 - 8 = 5.$ der ersten

$y = \frac{s - c}{2} = \frac{26 - 14}{2} = 13 - 7 = 6.$ der anderen

$z = \frac{s - b}{2} = \frac{26 - 12}{2} = 13 - 6 = 7.$ der dritten

$v = \frac{s - a}{2} = \frac{26 - 10}{2} = 13 - 5 = 8.$ der vierten Persohn

Probe.

Denn $5 + 6 + 7 = 18 = 10 + 8$, und $5 + 6 + 8 = 19 = 12 + 7$ und $5 + 7 + 8 = 20 = 14 + 6$ endlich $6 + 7 + 8 = 21 = 16 + 5$. folgends sind alle Bedingnissen der Aufgabe erfüllet.

Anmerkung.

40.) Wenn ihr auf gleiche Weise, wie sich die Sum̃en 3. 5. 6. oder auch mehrer Grössen gegen das gegebene Ubermaß verhalte, untersuchen wollet, dörffet ihr nur allezeit die erste 3. 4. 5. 6. ꝛc. Gleichungen zusammen addiren, die unbekannte in dem anderen Gliede subtrahiren, und das übergebliebene durch den Coefficiente dividiren, so kommet in dem Quotiente allezeit die Summe aller Grössen zusammen genommen heraus. Merket dabey die Lehrsätze, welche euch die vorhergehende Gleichungen an die Hand geben.

Lehrsätze.

41.) Bey drey Persohnen, deren Ausgaben zwey und zwey genommen, gegen einer dritten verglichen werden, ist die ganze Ausgabe gleich der Summe der Unterscheiden.

II. Bey vier Persohnen, deren Ausgaben, drey und drey genommen, mit einer vierten verglichen werden, ist die ganze Ausgabe gleich der helffte der Summe aller Unterscheiden.

III.

III. Bey 5. Persohnen deren Ausgaben, vier und vier genommen, mit einer fünften verglichen werden, ist die ganze Ausgabe gleich einem drittheil der Summe aller Unterscheiden.

IV. Bey 6. Persohnen, deren Ausgaben je 5 zu 5 genommen, mit einer 6ten verglichen werden, ist die ganze Ausgabe $\frac{1}{4}$ von der Summe aller Unterscheiden, und s. w. unendlich fort, dergestalt, daß der Nenner des Bruches sich allezeit nur um Eins vermehret. Ubrigens mag die Zahl der Persohnen so groß als es beliebig, angenommen werden, so ist dennoch der Nenner des Bruches allezeit nur um 2. kleiner, als die Zahl der Persohnen Einheiten enthält; denn bey vier Persohnen ist derselbe 2, bey fünfen 3, bey sechsen 4, bey sieben 5, u. s. w. unendlich fort.

42.) Hingegen sind die Ausgaben einer jeden Persohn insonderheit allezeit gleich der helfte der Summe aller Ausgaben, nach abgezogener helfte des Unterscheides, welcher sich zwischen dieser, und allen anderen besonderen Ausgaben befindet.

§. XIV.

Aus der gegebenen Vermengung etlicher Grössen mit einander, die Grössen selber, und ihre ganze Summe zu finden.

Aufgabe.

43.) Drey Persohnen haben ein gewisse Summe Geldes ausgegeben: die erste Ausgabe mit der anderen vermenget, giebet 13 fl. die erste Ausgabe mit der dritten vermenget, giebet 14 fl. und die andere Ausgabe mit der dritten vermenget, giebet 15 fl. man fragt, welches die Summe aller Ausgaben, und einer jeden besonders sey?

Auflösung.

Es sey die erste vermengte Ausgabe 13 = a, die andere 14 = b, die dritte 15 = c. ferner sey die besondere Ausgabe des ersten = x, des anderen = y, und des dritten = z. Da fliessen aus den Bedingnissen der Aufgabe diese drey folgende Gleichungen:

$$x + y = a$$
$$x + z = b$$
$$y + z = c$$

$$2x + 2y + 2z = a + b + c$$
$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$$

Welche ihr nur in eine Sume $2x + 2y + 2z = a + b + c$ bringet, und dieselbe durch 2 dividiren dörffet, da giebet der quotient $x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$ zu erkennen, daß die Summe aller Ausgaben gleich sey der helfte der Summe der vermengten Ausgaben.

Die besonderen Ausgaben zu finden, kan die ganze Summe aller Ausgaben = s genennet, und $x + y + z = s$ anstatt $x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$ gesetzet werden, wie in der vorhergehenden Aufgabe geschehen.

$$x + y + z = s$$
$$x = s - y - z$$
$$x = s - c$$ Die Ausgabe des ersten.

Subtrahiret auf beyden Seiten $y + z$, und setzet in die Stelle $-y - z$ ihren Werthe $-c$, so wird $x = s - c$ den Antheil der ersten Persohn vorstellen.

Wenn ihr jezt auf gleiche Weise bey den übrigen Ausgaben verfahret, so könnet ihr dieselbe mit geringer Mühe finden, wie aus den folgenden Operationen erhellet:

$x + y + z = s$
$y = s - x - z$
$y = s - b$ Die Ausgabe der anderen

$z + y + z = s$
$z = s - x - y$
$z = s - a$ Die Ausgabe der dritten.

Probe.

Wenn ihr in die Stelle der Buchstaben ihre Ziffer setzet, so wird $s = a + b + c = 13 + 14 + 15 = 6\frac{1}{2} + 7 + 7\frac{1}{2} = 21$. Die Summe aller Ausgaben hingegen ist $x = s - c = 21 - 15 = 6$ die Ausgabe der ersten, $y = s - 6 = 21 - 14 = 7$ die Ausgabe der anderen, und $z = s - a = 21 - 13 = 8$ die Ausgabe der dritten Persohn.

Da nun aber $6 + 7 = 13$, $6 + 8 = 14$, und $7 + 8 = 15$ ist, haben wir alle Bedingnissen dieser Aufgabe erfüllet.

Anmerkung.

44.) Es wird euch die Mühe nicht verdrüssen, wenn ihr auf gleiche Weise die Natur dieser Aufgabe bey vier, fünf, sechs 2c. u. s. w. vermengten Ausgaben untersuchet; denn diese Untersuchung selbst wird euch dienen eine allgemeine Regel zu erfinden, nach welcher ihr urtheilen könnet, ob die Ausgabe möglich, und kein Betrug dahinter verborgen sey? wie es sich denn äusseren kan, daß etwann eine der besonderen Ausgaben eine falsche grösse, und vielmehr ein Einnahm wäre; gleichwie wenn wir bey drey Persohnen, deren ganze Ausgabe $\frac{a + b + c}{2}$ ist, setzen wollten, a sey grösser als die beyden anderen vermengten Ausgaben; denn da ist bey Untersuchung der besonderen Ausgaben, weil wir bald a, bald b, bald c von der

Summe abziehen müssen, der Rest $\frac{b + c}{2} - \frac{1}{2}a$ unmöglich, und folgends ein falsche grösse, denn setzen wir $a = 30$, $b = 12$, und $c = 14$; so wird die ganze Ausgabe $s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{30 + 12 + 14}{2} = 15 + 6 + 7 = 28$. Hingegen sind die besondern Ausgaben, $z = s - a = 28 - 30$, das ist, weniger 2; solchergestalt aber folget, daß der dritte, anstatt er seinen Antheil bezahlen sollte, annoch 2 fl. zu empfangen hätte; weil sein Antheil 28 fl. weniger 30 fl. wäre, welches falsch ist. Damit ihr aber wissen möget, ob die Aufgabe möglich sey, dörffet ihr nur folgende Lehrsätze, die ans dergleichen Fällen sind ausgezogen worden, wohl in acht nehmen.

Lehrsätze.

45.) Auf daß die besonderen Ausgaben keine falschen Grössen sind, wird erforderet, daß bey drey Persohnen ein jede vermengte Ausgabe kleiner sey, als die beyden anderen zusam̃en genom̃en.

II. Bey vier Persohnen muß ein jede vermengte Ausgabe zweymahl genommen annoch kleiner seyn, als die drey anderen zusamen genommen.

III. Bey fünf Persohnen muß ein jede vermengte Ausgabe dreymahl genommen annoch kleiner seyn als die vier anderen zusammen genommen.

IV. Bey sechs Persohnen muß ein jede vermengte Ausgabe viermahl genom̃en annoch kleiner seyn als die fünf anderen zusammen genommen. u. s. w.

46.) Sind aber in der Aufgabe keine falsche Grössen verborgen, so habet ihr folgende Lehrsätze, die ihr von euch selbst durch genaue Untersuchung der Aufgabe finden könnet, zu beobachten.

I. Bey drey Persohnen, deren vermengte Ausgaben von zwey zu zwey bekannt sind, ist die ganze Ausgabe gleich der helfte der Summe aller vermengten Ausgaben.

II. Bey vier Persohnen, deren vermengte Ausgaben je drey und drey zusammen bekannt sind, ist die ganze Ausgabe gleich einem drittheil der Summe aller vermengten Ausgaben.

III. Bey fünf Persohnen deren vermengten Ausgaben je vier zu vier genommen, bekannt sind, ist die ganze Ausgabe $\frac{1}{4}$ von der Summe der vermengten Ausgaben.

IV. Bey sechs Persohnen, deren vermengte Ausgaben von fünf zu fünf bekannt sind, ist die ganze Ausgabe $\frac{1}{5}$ von der Summe aller vermengten Ausgaben. u. s. w. dergestalt, daß der Nenner deß Bruches allezeit nur um Eins kleiner ist als die Anzahl der Persohnen.

V. Hingegen ist ein jede besondere Ausgabe allezeit gleich der Sumē aller Ausgaben, nach abgezogener Summe aller vermengten Ausgaben der anderen Persohnen.

§. XV.

Aus der gegebenen Summe etlicher Theilen, und der Verhältnis derselben gegen einander, die Theile selber zu finden.

Aufgabe.

47.) Ein Haubtmann hat unter 5. Soldaten die Summe 79 fl. dergestalt getheilet, daß der andere $\frac{1}{3}$ von dem Antheile des ersten, der dritte $\frac{1}{4}$, die vierte zweymal so viel, und der fünfte dreymahl so viel, als der erste bekommen. Es ist die Frage nach eines jeden Antheil?

Auflösung.

Es sey der Antheil des ersten $= x$

so ist der Antheil des anderen $= \frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$

des dritten $= \frac{1}{4}x = \frac{x}{4}$

des vierten $= 2x$

des fünften $= 3x$

Und diese Antheile zusammen genommen sind gleich der Summe 79 fl. = a; daraus fliesset diese Gleichung:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 2x + 3x = a$$

$$3x + x + \frac{3x}{4} + 6x + 9x = 3a$$

$$12x + 4x + 3x + 24x + 36x = 12a$$

$$79x = 12a$$

$$x = \frac{12a}{79} = 12.$$

In welcher ihr nur alle Glieder durch die Nenner der Brüchen 3, 4 multipliciren, das Producte, welches herauskommet, nach verbesserter Ausdruckung, durch 79 dividiren, und für den Quotiente $x = \frac{12a}{79}$ anschreiben dörffet, so ist die Frage aufgelöset. Denn setzet in die Stelle der Buchstaben die Ziffer, so wird $x = \frac{12.79}{79} = 12.$ folgends ist der Antheil des ersten = 12, des anderen $\frac{x}{3} = 4$, des dritten $\frac{x}{4} = 3$, des vierten = 24, und des fünften = 36.

Probe.

Denn 12 + 4 + 3 + 24 + 36 = 79. W. Z. Th.

§. XVI.

Aus der gegebenen Grösse, die man subtrahiren soll, des unbekannten Restes multiplicante, und der Verhältnis des herauskommenden Productes zu der gesuchten Grösse, die Grösse selber zu finden.

Aufgabe.

48.) Als Petrus gefragt wurde, wie viel er Geld im Sacke habe? gabe er zur Antwort: ziehet von meinem Gelde 8 fl. ab, und multiplicirет das übergebliebene durch 5, so kommet im Producte die helfte meines Geldes heraus. Es ist die Frage, wie viel Petrus Geld im Sacke habe.

Auflösung.

Es sey 8 = a, 5 = b, die helfte 2 = c, und die unbekannte Summe = x. so ist nach den Bedingnissen der Aufgabe, wenn ihr a von x abziehet, und das übergebliebene x − a durch b multipliciret, das Producte, welches herauskommet, bx − ab gleich der helfte der Sume des gesuchten Geldes; daraus fliesset diese Gleichung:

$$bx - ab = \frac{x}{c}$$

$$cbx - abc = x$$

$$cbx = x + abc$$

$$cbx - x = abc$$

$$x = \frac{abc}{cb - 1}$$

In welcher ihr nur alle Glieder durch den Nenner c multipliciren, zu dem Producte cbx − abc = x, welches herauskomet, abc addiren, von der Summe cbx = x + abc das x subtrahiren, und das übergebliebene bcx − x = abc durch bc − 1. (Cap. I. §. IV. n. 22.) dividiren dörffet, so giebet der Quotiente $x = \frac{abc}{bc - 1}$

die Auflösung der Frage. Denn setzet in die Stelle der Buchstaben ihren Werthe, so ist $x = \frac{abc}{bc-1} = \frac{80}{9} = 8\frac{8}{9}$ fl.

Probe.

Denn $8\frac{8}{9} - 8 = \frac{8}{9} \cdot 5 = 40 : 9 = \frac{40}{9}$ welches die helfte von $\frac{80}{9}$ ist.

§. XVII.

Es wird euch gegeben, wie viel man bey einem gefaßten Vorhaben zu viel, und bey einem anderen, zu wenig habe, ihr sollet die Zahlen selber finden.

Aufgabe.

49.) Man schicket ein gewisse Anzahl Wägen vor das Zeughauß, die daselbst zuruckgebliebene Kugeln abzuholen: der dazu verordnete Officier ware willens einen jeden Wagen mit 100 Kugeln zu beladen; allein bey Untersuchung derselben fande er, daß er 60. Kugeln zu diesem Vorhaben zu wenig habe; deswegen ladet er auf ein jeden Wagen nur 90. Kugeln, da blieben ihm aber 50. Kugeln übrige. Es wird nach der Anzahl der Kugeln, und Wägen gefragt?

Auflösung.

Es sey $100 = a$
$60 = b$
$90 = c$
$50 = d$

und die unbekannte Summe der Wägen $= x$, so ist nach den Bedingnissen der Aufgabe:

ax –

$$ax - b = cx + d$$
$$ax = cx + b + d$$
$$ax - cx = b + d$$
$$x = {}_{c}d + b, : {}_{c}a - c,.$$

Addiret b, von der Summe $ax = cx + b + d$ subtrahiret cx, und dividiret das übergebliebene $ax - cx = b + d$ durch $a - c$, so kommet im Quotiente $x = d + b : a - c$ die Anzahl der Wägen heraus. Denn setzet in die Stelle der Buchstaben ihren Werthe, so ist $x = d + b : a - c = 50 + 60 : 100 - 90 = 110 : 10 = 11$. die Anzahl der Wägen. Wenn ihr jezt die Zahl der Wägen 11 durch die Anzahl der aufgeladenen Kugeln 90 multipliciret, so kommet im Producte 990. die Zahl der Kugeln heraus, und nach hinzugesezten 50, welche übergeblieben, kommet die ganze Anzahl 1040. der Kugeln zum Vorscheine.

Probe.

Denn $11 . 100 = 1100 - 1040 = 60$. und $11 . 90 = 990 + 50 = 1040$. W. Z. Th.

§. XVIII.

Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß ihr Product in einander einer gegebenen Zahl gleichet, das Quadrate aber der Summe zu dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen eine gegebene Verhältnis habe.

Aufgabe.

50.) Ein Geometra hat zwey Stand-Linien; wenn er eine durch die andere multiplsiciret, so giebet das Producte, welches herauskommet, 96. Ruthen. Hingegen verhält sich das Quadrat der Summe zu dem Quadrate des Unterscheides beyder Linien wie 1 zu 25. Man fragt, wie viel Ruthen lange beyde Linien seyen.

Auflösung.

Es sey das Product $=96=a$, die gegebene Verhältnis: wie 1 zu $25=\frac{b}{c}$ die Summe $=2x$, und die Differenz $=2y$. Da ist die eine Zahl $x+y$ und die andere $x-y$. deren Producte aber in einander $xx-yy$. da nun dieses 96 gleichet, so fliesset daraus diese Gleichung: $xx-yy=a$

$$xx=a+yy$$

hingegen ist $\frac{b}{c}=\frac{4xx}{4yy}=\frac{xx}{yy}$

$$b=\frac{cxx}{yy}$$

$$byy=cxx$$

$$byy:c=xx$$

Multipliciret durch den Nenner yy, das Producte aber $byy=cxx$ durch c, und dividiret auch dieses Producte $byy=cxx$ durch c, so wird $\frac{byy}{c}=xx$. demnach setzet in die Gleichung $xx=u+yy$ in die Stelle xx seinen in der ersten Gleichung gefundenen Werthe $\frac{byy}{c}$, so bekommet ihr $\frac{byy}{c}=a+yy$

$$byy=ac+cyy$$

$$byy-cyy=ac$$

$$yy=\frac{ac}{b-c}$$

$$y=\sqrt{\frac{ac}{b-c}}$$

Multiplicirt durch den Nenner c, von dem Producte $ac+cyy = byy$ subtrahiret cyy, und dividiret das übergebliebene $byy - cyy = ac$ durch $b-c$, so wird $yy = \frac{ac}{b-c}$. endlich ziehet die Quadrat-Wurzel aus, so ist durch $y = \sqrt{\frac{ac}{b-c}}$ die Frage aufgelöset. Denn setzet in die Stelle der Buchstaben die Ziffern so wird $y = \sqrt{\frac{ac}{b-c}} = \sqrt{\frac{96}{25-1}} = \sqrt{96:24} = \sqrt{4} = 2$. und $x = \sqrt{a+yy} = \sqrt{96+4} = \sqrt{100} = 10$. folgends $x+y = 10+2 = 12$, und $x-y = 10-2 = 8$.

Probe

Denn $12.8 = 96$ und $\frac{25}{1} = \frac{400}{16}$. W. Z. Th.

§. XIX.

Aus dem gegebenen Multiplicante, und der Verhältnis des Productes zu seinem Quadrate, die Grösse selber zu finden.

Aufgabe.

61.) Als ein Feuerwercker, so von einer Belagerung zurucke gekommen, wie viel mal er abgefeuret habe, gefragt wurde: gabe er zur Antwort: multiplicirt die Zahl der Kugeln durch 3, so ist das Product gleich $\frac{1}{9}$ seines Quadrates. Man fragt, wie viel mal er abgefeueret habe?

Auf-

Auflösung.

Es sey die umbekannte Zahl der Kugeln $= x$; so ist $3x = \frac{xx}{9}$ ein Gleichung, in welcher ihr nur durch den Nenner 9 multipliciren, und das Producte $27x = xx$ durch x dividiren dörffet so ist die Frage aufgelöset. Die Operation stehet wie dahier:

$$3x = \frac{xx}{9}$$
$$27x = xx$$
$$27 = x$$

Probe.

Denn $27 . 3 = 81$. und $27 . 27 = 729$. hingegen ist $729 : 9 = 81$. folgends ist $3x = 81$ ein Neuntheil des Quadrates 27.

§. XX.

52.) Eine Bäuerin traget Eyer zu Markte, davon verkauffet sie die helfte, und noch ein halbes Eye darüber; sie verkauffet die helfte des übergebliebenen, und abermahl ein halbes Eye dazu: endlich verkauffet sie auch die helfte dieses Restes, und noch ein halbes Eye daruber; unterdessen hat dennoch ein jede Käufferin kein ganze Zahl der Eyern eingekaufft. Man fragt, wie solches habe geschehen können?

Auflösung.

Ein sey x die Zahl deren von der Bäuerin auf den Markte gebrachten Eyern; da ist der erste Verkauff $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, und das übergebliebene $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. ferners ist der andere Verkauff $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ das ist $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, und sein Rest $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$. folgends ist der dritte Verkauff $\frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$ das ist $\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$ wenn ihr jezt die Brüche $\frac{4}{8}x + \frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}x + \frac{2}{8}$, $\frac{1}{8}x + \frac{1}{8}$ in eine Sume bringet, so ist dieselbe gleich $\frac{7}{8}x + \frac{7}{8}$ den drey Verkäuffen zusamen genommen. Hieraus fliesset diese Gleichung:

$$\tfrac{7}{8}x + \tfrac{7}{8} = \tfrac{4}{8}x + \tfrac{4}{8} + \tfrac{2}{8}x + \tfrac{2}{8} + \tfrac{1}{8}x + \tfrac{1}{8}$$
$$7x + 7 = 4x + 4 + 2x + 2 + x + 1$$
$$7x = 4x + 2x + x$$
$$7 = 4 + 2 + 1$$

In welcher ihr nur alles durch 8 multipliciren, von dem Producte $7x + 7 = 4x + 4 + 2x + 2 + x + 1$ die 7 lincker Handes subtrahiren, und das übergebliebene $7x = 4x + 2x + x$ durch x dividiren dörffet, so giebet der Quotient $7 = 4 + 2 + 1$ den ganzen Verkauff, welcher den drey besondern Verkäuffen $4 + 2 + 1$ zusamen genommen gleich ist. Demnach ist der erste Verkauff die helfte von $7 = 3\tfrac{1}{2}$ und noch $\tfrac{1}{2}$ dazu $= 4$; der erste Rest aber $= 3$; da nun die helfte von $3 = 1\tfrac{1}{2}$ ist, so muß der zweyte Verkauff $1\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2$ seyn; allwo nur noch 1 übrig bleibet; es ist aber die helfte von $1 = \tfrac{1}{2}$, und noch $\tfrac{1}{2}$ dazu $= 1$ giebet den dritten Verkauff; folgends hat ein jede Käufferin ein ganze Zahl der Eyern eingekauffet.

53.) Wenn ihr die Natur dieser Aufgabe noch ferners bey 4, 5, 6 ꝛc. Käufferinnen etwas genauers untersuchet, so könnet ihr diese allgemeine Regel, welche wir aus derley versuchen ausgezogen, von euch selbst finden; denn ihr werdet wahrnehmen, daß, demnach bey drey Persohnen die Anzahl deren auf den Markte gebrachten Eyern 7 gewesen, diese Zahl 7 aber nur um Eins geringer als der Cubus von 2 ist, man nur die Zahl der Persohnen für den Exponente der Dignität, zu welcher die Zahl 2 erhoben werden solle, annehmen, und um Eins verminderen dörffe, so seye das übergebliebene die Zahl der auf den Markte gebrachten Eyeren. Dannenhero, wenn die Frage, bey 4. Persohnen angestellet wird, erhebet ihr die Zahl 2 zu der 4ten Potenz = 16, und verminderet das Producte 16, welches herauskommet um Eins, so sind die übergebliebene 15 die Anzahl der auf den Markte gebrachten Eyeren. Eben also, wenn bey 5. Käufferen gefragt wird, wie viel ein jeder empfangen habe, dörffet ihr nur die Zahl 2 zu der fünften Potenz erheben, und um Eins verminderen, so ist 31 die Zahl, welche die Frage auflöset. u. s. w. unendlich fort.

§. XXI.

§. XXI.

Aus dem gegebenen Quadrate, und Verhältnis der Seiten gegen einander, das Quadrat selbst aufzureissen.

Aufgabe.

54.) Man soll 37500. Mann dergestalt in ein gevierte Ordnung stellen, daß die länge zur breite sich verhalte, wie 5 zu 3. wie viel kommen voran, und auf der Seite zu stehen?

Auflösung.

Ein sey die breite $= x$, und $37500 = a$. Da könnet ihr erstens die Länge durch die Regel Detri finden, wenn ihr sprechet: 3 in der Breithe geben 5 in der Länge, was giebet x in der Breite?

$$3.\ 5 = x$$

$$\frac{5x}{3}$$

Wenn ihr jezt die Länge mit der Breite, das ist, $\frac{5x}{3}$ mit x multipliciret, so muß das Product $\frac{5xx}{3}$ die ganze Mannschafft vorstellen; daher fliesset diese Gleichung:

$$\frac{5}{3}xx = a$$

$$5xx = 3a$$

$$xx = \frac{3}{5}a$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{5}a}$$

In

In welcher ihr, um den Bruch von xx wegzubringen, beyde Seiten durch den Nenner 3 multipliciren, das Product $5xx = 3a$ durch 5 dividiren, und aus dem Quotiente $xx = \frac{3}{5}a$ die Quadrat-Wurzel ausziehen müsset, so ist $x = \sqrt{\frac{3}{5}a}$ bekannt.

Setzet in die Stelle der Buchstaben ihre Werthe, da wird $x = \sqrt{\frac{3}{5}a} = \sqrt{112500} = \sqrt{22500} = 150.$ folgends kommen in die Breite 150. Mann, und (weil die Länge $\frac{5}{3}x$ ist) in die Länge 250. Mann.

Probe.

Denn $150 \cdot 5 = 750$ und $\frac{750}{3} = 250$. W. Z. Th.

§. XXII.

Aus der gegebenen Summe etlicher Theilen, und der vermengten Verhältnis zweyer Theilen gegen zwey andere, die Theile selber zu finden.

Aufgabe.

56.) Drey Soldaten haben 15. fl. dergestalt zu ungleichen Theilen unter sich getheilet, daß $\frac{1}{3}$ von dem Antheile des ersten nebst $\frac{3}{4}$ von dem Antheile des anderen gleiche sind $\frac{4}{5}$ von dem Antheile des anderen.

Ingleichen daß $\frac{4}{5}$ von dem Antheile des dritten mehr $\frac{1}{4}$ von dem Antheile des anderen gleiche sind $\frac{2}{3}$ von dem Antheile des ersten, und $\frac{1}{5}$ von dem Antheile des dritten. Man fragt nach eines jeden Antheile?

Auflösung.

Es sey der Antheil des ersten $= z$
des anderen $= y$
des dritten $= x$

Da fliesset aus den Bedingnissen der Aufgabe diese Gleichung:

$$\frac{1}{3}z + \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{4}y$$ die erste Bedingnis

$$20z + 45y = 48x + 15y$$

$$20z + 30y = 48x$$

$$30y = 48x - 20z$$

$$15y = 24x - 10z$$ der Werthe von $15y$.

Die Brüche zu fliehen reduciret alles zu einem gemeinen Nenner 60. Da kommet $\frac{20}{60}z + \frac{45}{60}y = \frac{48}{60}x + \frac{15}{60}y$ heraus. Multipliciret alle Glieder durch 60, ziehet $15y$ und $20z$ von dem Producte $20z + 45y = 48x + 15y$ ab, und dividiret das übergebliebene $30y = 48x - 20z$ durch 2, so giebet der Quotient $15y = 24x - 10z$ den ersten Werth von $15y$ zu erkennen.

Die andere Bedingnis der Aufgabe giebet diese Gleichung:

$$\frac{4}{5}x + \frac{1}{4}y = \frac{2}{3}z + \frac{1}{5}x$$

$$48x + 15y = 40z + 12x$$

$$15y = 40z - 36x$$ der andere Werth von $15y$.

Hebet die Brüche auf, wie erst geschehen, und subtrahiret $48x$ von $48x + 15y = 40z + 12x$, so giebet der Rest $15y = 40z - 36x$ den anderen Werth von $15y$ zu erkennen.

Wenn ihr jezt diese beyde gefundene Werthe gegen einander vergleichet, auf beyden Seiten $36x$ und $10z$ addiret, die Summe aber $60x = 50z$ durch 10, und den Quotiente $6x = 5z$ durch 5 dividiret, so kommet $\frac{6}{5}x = z$ heraus, wie aus der folgenden Operation erhellet: $24x - 10z = 40z - 36x$.

$$60x = 50z$$

$$6x = 5z$$

$$\frac{6}{5}x = z$$

Demnach könnet ihr den Werth $6x$ von $5z$ in den ersten Werth von $15y$ übertragen, und $15y = 12x$ durch 3, den Quotiente aber $54 = 4x$ durch 5 dividiren, so wird $y = \frac{4}{5}x$, wie dahier zu ersehen:

$$15y = 12x$$

$$5y = 4x$$

$$y = \frac{4}{5}x$$

Dan-

Dannenhero ist der Antheil des ersten $z = \frac{6}{5}x$, des anderen $y = \frac{4}{5}x$, und des dritten x.

Wenn ihr jezt diese drey Antheile zusammen setzet, so ist ihr Summe $x + \frac{4}{5}x + \frac{6}{5}x$ gleich der getheilten Summe 15 fl. daher fliesset diese Gleichung:

$$x + \frac{4}{5}x + \frac{6}{5}x = 15$$
$$5x + 4x + \frac{30}{5}x = 75$$
$$25x + 20x + 30x = 375$$
$$75x = 375$$
$$x = 375 : 75$$
$$x = 5$$

In welcher ihr nur alles durch die Nenner 5 multiplicieren, die Ausdruckung verbesseren, und $75x = 375$ durch 75 dividiren dörffet, so giebet der Quotient $x = 5$ den Antheil des dritten.

Da nun $y = \frac{4}{5}x$ ist, so gleichet $y = \frac{20}{5} = 4$ dem Antheile des anderen. Eben also, weil $z = \frac{6}{5}x$ gleichet, so ist $z = \frac{30}{5} = 6$ der Antheil des ersten.

Probe

Denn $4 + 5 + 6 = 15$. erfüllet alle Bedingnissen der Aufgabe, folgends ist dieselbe aufgelöset.

§. XXIII.

Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffenheit, daß das Product einer jeden in die Quadrat-Wurzel der anderen einer gegebenen Zahl gleich sey.

Aufgabe.

57.) Zwey Persohnen haben mit einander ein gewisse Summe Geldes also getheilet, daß das Product des Antheiles der ersten in die Quadrat-Wurzel des Antheiles der anderen 18 fl. und hingegen daß das Product des Antheiles der

der anderen in die Quadrat-Wurzel des Antheiles der ersten nur 12 fl. betraget. Es ist die Frage nach eines jeden Antheil?

Auflösung.

Es sey das eine Product $18 = a$
das andere $12 = b$
der Antheil des ersten $= x$
des anderen $= y$

So ist $x\sqrt{y} = a$, und $y\sqrt{x} = b$. erhebet nach Lehre des ersten Theiles sechsten Capitels n. 179. die Grösse vor dem Wurzel-Zeichen zum Quadrate, und multipliciret dasselbe mit dem anderen Theile, so unter dem Wurzel-Zeichen stehet; da kommet $x^2 y$ und $y^2 x$ anstatt $x\sqrt{y}$ und $y\sqrt{x}$ heraus. Da ihr aber solchergestalt eine Seite der Gleichung zum Quadrate erhoben, müsset ihr auch die andere, um die Gleichheit zu erhalten, dahin erheben; denn so bekomet ihr diese zwey folgende Gleichungen: $x^2 y = a^2$ und $y^2 x = b^2$

$$x = \frac{b^2}{y^2}$$

$$x^2 = \frac{b^4}{y^4}$$

Hernach aber könnet ihr durch die y^2 dividiren, und den Quotienten $x = \frac{b^2}{y^2}$ zum Quadrate erheben, so ist $x^2 = \frac{b^4}{y^4}$

$$\frac{b^4 y}{y^4} = \frac{b^4}{y^3} = a^2$$

$$b^4 = a^2 y^3$$

$$\frac{b^4}{a^2} = y^3$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}$$

$$y = 4$$
$$x = 9.$$

Setzet den Werth von $x^2 = \frac{b^4}{y^4}$ in die Gleichung $x^2 y = a^2$, so wird $\frac{b^4 y}{y^4} = \frac{b^4}{y^3} = a^2$. Multiplicieret durch den Nenner y^3, dividiret das Product $b^4 = a^2 y^3$ durch a^2, und ziehet aus dem Quotiente $y^3 = \frac{b^4}{a^2}$ die Cubic-Wurzel aus, so ist $y = \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}$. Denn setzet in die Stelle der Buchstaben ihre Werthe, so wird $b^4 = 20736$ und $a^2 = 324$; folgends $y = \sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{20736}{324}} = \sqrt[3]{64} = 4$, und $x = \sqrt{\frac{b^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{144}{16}} = 9$

Probe.

Denn $9 . 2 = 18$, und $4 . 3 = 12$. W. Z. Th.

Das Dritte Capitel.

Von den undeterminirten Aufgaben.

§. I.

Erklärung.

58.) Bisher habe ich die meisten Regeln der Algebra von den determinirten Aufgaben erkläret, und bey allerhand Fällen angebracht; nun will ich die undeterminirten vornehmen, welche auch ihren vielfältigen Nutzen haben, und besondere Kunstgriffe nachzusinnen an die Hand geben. Es sind aber undeterminirte Aufgaben, wenn, nachdeme alle Bedingnissen der Aufgabe erfüllet worden, ihr zu einer lezteren Gleichung gelanget, in welcher die unbekannte, weil sie sich auf beyden Seiten mit einerley Zeichen befindet, euch nichts von ihrer Eigenschafft offenbahret; in Ansehung, daß, wenn ihr in diesem Falle die unbekañte subtrahiret, euch nur bekannte Grössen, ja offt im Gegentheile zwey unbekannte übrig bleiben, welche ihr nicht vermögend seyd in eine zu versetzen. In beyden diesen Fällen ist die Aufgabe undeterminiret, und kan auf mehrerley Weisen aufgelöset werden, welches geschiehet wenn

wenn ihr in die Stelle der unbekanten eine Zahl nach Belieben, sie sey groß, oder klein, ganz oder gebrochen, wenn man nur in den durch die Aufgabe vorgeschriebenen Schrancken bleibet, zu versetzen trachtet. Ihr werdet die Auflösung dieser Aufgaben besser durch Exempeln, als Regeln erlernen, deswegen wollen wir uns dahier nicht aufhalten.

§. II.

Aufgabe.

59.) Vier Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der beyden ersten der dritten, und ihre Differenz der vierten Zahl gleich sey.

Auflösung.

Es sey die erste Zahl x, die andere y; so ist ihr Summe $x + y$, und ihre Differenz $x - y$; die dritte sey z, und die vierte t. Da nun die Summe der beyden ersten $x + y$ der dritten gleichet, muß diese Gleichung zum Vorscheine kommen:

$$x + y = z \text{ und } x - y = t$$
$$x = z - y \quad x = t + y$$

Addiret in der Gleichung zur Rechten, und subtrahiret in der anderen zur Lincken das y, da kommen zwey Werthe von x, nemlich $x = y - z$, und $x = t + y$ zum Vorscheine; wenn ihr nun den Werthe von x in die erste Gleichung zur Lincken $x = t + y$ in die Stelle von x setzet, so kommet $z - y = t + y$ heraus; allwo ihr nur y addiren, von der Summe $z = t + 2y$ das t subtrahiren, und das übergebliebene $z - t = 2y$ durch 2 dividiren dörffet, so giebet der Quotient $\frac{z - t}{2} = y$ den Werthe von y.

Da nun nicht mehrere Gleichungen zu ersinnen sind, und dennoch die vorgeschriebene Bedingnissen erfüllet worden, so können die Zah-

len z und t nach Belieben angenohmen werden; doch dergestalt, daß, wenn ihr ganze Zahlen verlanget, ihr vor z und t solche annehmen müsset, deren Summe und Differenz sich durch 2 dividiren lassen.

Es sey $z = 8$, $t = 2$; da ist $x = \frac{10}{2} = 5$, und $y = \frac{6}{2} = 3$

Probe.

Denn $5 + 3 = 8$. und $5 - 3 = 2$. W. Z. Th.

Oder es sey $z = 9$ und $t = 4$; so ist $x = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$ und $y = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

Probe.

Denn $6\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 9$ und $6\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 4$.

§. III.

Zwey Zahlen zu finden, deren Summe zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Aufgabe.

60.) Einer denket zwey ungleiche Zahlen; und man weißt, daß wenn man diese Zahlen durch einander multipliciret, und zum Producte ihre Summe addiret, dieselbe 34 betrage. Es ist die Frage nach diesen beyden Zahlen?

Auflösung.

Es sey $34 = a$, der unbekannten eine $= x$, und die andere y, so ist ihr Product xy, und ihre Summe $x + y$; da nun die Summe zugleich mit dem Producte $= 34$ ist, so fliesset daher diese Gleichung:

xy

$$xy + x + y = a$$
$$xy + x = a - y \quad \left\{ \frac{y + 1}{x = a - y : y + 1} \right.$$

In welcher ihr nur y subtrahiren, und das übergebliebene durch $y + 1$ (n. 22.) dividiren dörffet; der Quotient $x = \frac{a - y}{y + 1}$ oder $x = (a - y) : (y + 1)$, zeiget den Werthe vom x, und erfüllet alle Bedingnissen der Aufgabe. Unterdessen bleiben euch dennoch zwey unbekannte übrig, die ihr nicht vermögend seyd in eine zu verwandlen; deswegen stehet euch frey für y eine Zahl nach Belieben anzunehmen; doch mit der Bedingnis, daß die angenohmene Zahl kleiner sey als a, denn sonst wäre der Zehler des Bruches $a - y$ ein falsche Grösse, und folgends auch x. Es sey Z. E. $y = 4$. so ist $z = 6$, und durch diese zwey Zahlen wird auch die Aufgabe aufgelöset.

Probe

Denn $4 . 6 = 24 + 10 = 34$. und $6 + 4 = 10$.

§. IV.

Zwey Zahlen zu finden von der Beschaffheit, daß, wenn ihr Summe von ihrem Producte in einander abgezogen wird, das übergebliebene einer gegebenen Zahl gleich ist.

Aufgabe.

61.) Zwey Soldaten haben eine Beute dergestalt unter sich getheilet, daß, wenn man ihre Antheile durch einander multipliciret, und von dem Producte die Summe beyder Antheilen subtrahiret, das übergebliebene 24 ausmache. Man fragt nach eines jeden Antheil?

Auflösung.

Es sey 24 = a, der Antheil des einen = z, und des anderen = y, ihr Product aber = zy, und ihre Summe z + y. Ziehet diese Summe von dem Producte ab, so bekommet ihr diese Gleichung:

$$zy - z - y = a$$
$$zy - z = a + y \left\{ \frac{\qquad}{z = a + y : y - 1} \right. \quad y - 1$$

In welcher ihr nur das y addiren, und die Sume zy − z = a + y durch y − 1 (n. 22.) dividiren dörffet, so zeiget der Quotient z = a + y : y − 1 den Werthe von z. Da ihr nun alle Bedingnissen der Aufgabe erfüllet, könnet ihr für y eine Zahl nach Belieben annehmen, wenn sie nur grösser als eins ist; denn wiedrigen Falls wäre der Nenner y − 1 eine falsche Grösse, und folgends auch z. Es sey z. E. y = 4, so ist z = a + y : y − 1 = 24 + 4 : 4 − 1. = 28 : 3 = $9\frac{1}{3}$.

Probe.

Denn 4. $9\frac{1}{3}$ = $37\frac{1}{3}$ und 4 + $9\frac{1}{3}$ = $13\frac{1}{3}$. deswegen $37\frac{1}{3}$ − $13\frac{1}{3}$ = 24.

§. V.

Zwey Zahlen zu finden deren Unterscheide zugleich mit ihrem Producte einer gegebenen Zahl gleich ist.

Aufgabe.

62.) Zwey Brüder haben mit einander ein gewisse Sume Geldes also getheilet, daß der Unterscheid zu dem Producte gegebener Antheilen gesetzet 26 fl. betraget. Es ist die Frage nach eines jeden Antheil?

Auf-

Auflösung.

Es sey 26 = a, der Antheil des ersten = z, und des anderen = y; so ist der Unterscheid beyder Antheilen z − y, und ihr Product z y; folgends die erste Gleichung: $zy + z - y = a$

$$zy + z = a + y \Big\{ \frac{y + 1}{z = a + y : y + 1.}$$

In welcher ihr nur y addiren, und die Summe durch y + 1. dividiren dörffet, so giebet der Quotient $z = \frac{a + y}{y + 1}$ den Werthe von z zu erkennen

In diesem Falle muß z grösser als y seyn; weil sein Werthe $a + y : y + 1$ auch grösser als y ist. Damit ihr aber wissen möget, wie hoch der Werthe von y steigen könne, dörffet ihr nur $a + y : y + 1$. und y durch y + 1 multipliciren; denn solchergestalt werdet ihr aus dem Producte $a + y$, und $yy + y$ wahrnehmen, daß $a + y$ grösser seyn müsse als das andere; weil $a + y$ schon vor der Multiplication grösser gewesen. Ziehet auf beyden Seiten y ab, so bleibet dahier a, und dort yy übrig, und ist a grösser als yy, deswegen muß auch $\sqrt{a}$ grösser als yy seyn. Demnach kan y nicht über 5. steigen, welches beynahe die Quadrat-Wurzel von 26 = a ist.

Setzet in die Stelle der Buchstaben ihren Werthe, so wird a = 26, und, weil y undeterminirt ist, könnet ihr anstatt y eine Zahl nach Belieben annehmen, wenn sie nur nicht grösser als 5 ist. Es sey y = 5; so wird $z = a + y : y + 1. = 26 + 5 : 5 + 1 = 31 : 6 = 5\frac{1}{6}$

Probe.

Denn $5 . 5\frac{1}{6} = 25\frac{5}{6}$ und $5\frac{1}{6} - 5 = \frac{1}{6}$. so fort $25\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 26$.

§. VI.

Zwey Zahlen zu finden, deren Product ein vollkomener Cubus ist, dessen Wurzel dem Producte aus der ersten in das Quadrate der anderen gleich ist.

Auflösung.

63.) Ihr könnet aus den Bedingnissen der Aufgabe wahrnehmen, daß eine aus diesen beyden Zahlen gebrochen seyn müsse; anerwogen die Wurzel des Cubi dem Producte aus der ersten in das Quadrate der anderen gleichen solle; da dennoch der Cubus selbst nur dem Producte der ersten in die andere gleich ist: folgends müsse der Cubus kleiner als sein Wurzel seyn; welches unmöglich wäre, wenn kein Bruch darunter verborgen seyn sollte.

Es sey die erste Zahl $= z$, die andere $= y$, und die Cubic-Wurzel $= x$; so ist nach der ersten Bedingnis $zy = x^3$, und nach der anderen $x = zyy$. die Operation stehet wie folgt:

$$zy = x^3 \qquad\qquad x = zyy$$

$$z = \frac{x^3}{y} \qquad\qquad \frac{x}{yy} = z$$

Dividiret in der ersten Gleichung zur rechten $zy = x^3$ durch y, so kommet der erste Werthe von $z = \frac{x^3}{y}$ heraus; dividiret auch in der anderen Gleichung zur Linken $x = zyy$ durch yy, so giebet der Quotient $z = \frac{x}{yy}$ den anderen Werthe von z.

Wenn ihr jezt in die erste Gleichung den Werthe von $z = \frac{x}{yy}$ in die Stelle von z setzet, bekomet ihr eine andere Gleichung $\frac{x^3}{y} = \frac{x}{yy}$ welche durch y multipliciret, nach verbesserter Ausdruckung $x^3 = \frac{x}{y}$ giebet:

$$\frac{x^3}{y} = \frac{x}{yy}$$

$$x^3 = \frac{xy}{yy} = \frac{x}{y}$$

$$x^3 = \frac{x}{y}$$

$$yx^3 = x$$

$$y = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Multipliciret ferners auch durch y, hernach dividiret das Producte, welches herauskommet, $yx^3 = x$ durch x^3, und verbesseret in dem Quotiente $y = \frac{x}{x^3}$ die Ausdruckung, so wird $y = \frac{1}{x^2}$. Da nun in der ersten Gleichung zur Lincken $z = \frac{x^3}{y}$ ware so wird dasselbe $= \frac{x^3}{\frac{1}{x^2}}$ das ist, $z = x^3 : \frac{1}{x^2}$ folgends wenn ihr durch x^2 multipliciret, und durch den Zehler 1 dividiret, $z = x^5$; weil Eins nicht dividiret. Es sey $x = 3$, da ist $y = \frac{1}{9}$, und $z^5 = 243$, folgends $zy = 27$, und $zyy = 3$.

§. VIII.

Ein vollkommenes Quadrate in zwey andere vollkommene Quadrate zu theilen.

Auf=

Aufgabe.

64.) Ein Haubtmann soll seine Compagnie, welche 100. Mann starck ist, dergestalt in zwey Theile unterscheiden, daß die beyden gemachten Theile besonders ein Bataillon Quarrée formiren können. Man fragt, wie diese Eintheilung anzustellen seye?

Auflösung.

Es sey a die Seite 10. des Quadrates 100. die Seite des einen von den gesuchten $= z$, und des anderen $= x$, so ist $aa = zz = xx$. und sind alle Bedingnissen der Aufgabe erfüllet; dessen aber ungeachtet, bleiben euch zwey unbekannte übrig, welche ihr nicht vermögend seyd durch eine nach Belieben angenommene Zahl zu determiniren; denn, wenn ihr auch setzet, es sey $x = 4$, und dessen Quadrate $xx = 16$ von 100 abziehet, so ist doch das übergebliebene 84 kein vollkommenes Quadrate. Deßwegen müsset ihr ein anderen Weeg, damit ihr zu der Auflösung gelanget, auf folgende Weise antretten, und in Erwegung, daß ein jede Seite der unbekannten Quadraten kleiner sey als die Seite a des gegebenen, die Seite xx gleich $zy - a$ machen. Ihr dörffet auch dieses thun; denn, weil die Grösse, welche ihr hinzusetzet, undeterminiret ist, so kan nicht gezweiffelt werden, daß durch y eine Zahl vorgestellet werde, die durch z multiplicirt, ein Product gebe, so nach abgezogenem a der Seite x gleich sey. Ubrigens wenn ihr $zy - a$ für die Seite x annehmet, so bleibet euch nur noch ein unbekannte z übrig, und habet anbey noch diesen Vortheile, daß, wenn ihr die Quadrate von z und $zy - a$ machet, ihr die unbekannte z auf den ersten Grade bringen könnet: wie aus der folgenden Operation erhellet:

$$zz + zzyy - 2azy + aa = aa$$
$$zz + zzyy = 2azy$$

Denn wenn ihr z und $zy - a$ zu ihren Quadraten erhebet, so kommet nach den Bedingnissen der Aufgabe diese Gleichung: $zz + zzyy$
$- 2azy$

$-2azy + aa = aa$ heraus. In welcher ihr nur aa subtrahiren, $2azy$ addiren, die Summe $zz + zzyy = 2azy$ durch z, und diesen Quotiente $z + zyy = 2ay$ durch $yy + 1$ dividiren dörffet, so kommet $z = 2ay : yy + 1$. heraus, welches den ersten Werthe von z offenbahret.

$$zz + zzyy = 2azy$$
$$z + zyy = 2ay$$
$$z = 2ayy : yy + 1 \text{ der Werthe von } z.$$

Wenn ihr jezt diesen gefundenen Werthe in die Seithe x übertraget, so bekommet ihr anstatt $zy - a = x$ diese Gleichung:

$$x = \frac{2ayy - a}{yy + 1.}$$

$$x = ayy - a : yy + 1. \text{ der Werthe von } x$$

In welcher ihr nur alles zu Brüche reduciren, und die Ausdruckung verbesseren dörffet, so muß $x = ayya : yy + 1$ die gegebene Bedingnissen erfüllen. Da nun y undeterminiret ist, könnet ihr $y = 2$ machen, denn solchergestalt wird $z = 2ay : yy + 1 = 40 : 5 = 8$. und $x = ayy - a : yy + 1 = 40 - 10 : 5 = 6$ folgends $zz = 64$, und $xx = 36$. denn $64 + 36 = 100$.

§. VIII.

Zwey Quadrate von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man das eine zu dem Producte aus beyden addiret, ein jede Summe ein vollkommenes Quadrate ist.

Auflösung.

65.) Es sey das eine Quadrat xx, und das andere yy, so ist ihr Producte $xxyy$; und deßwegen seynd $xxyy + xx$ und $xxyy + yy$ vollkommene Quadrate. dividiret das erste durch xx, und das andere durch yy; so sind $yy + 1$

und $xx + 1$ annoch vollkommene Quadrate §. II. n. 7. Jezt könnet ihr, damit sich yy und xx subtrahiren lassen, und folgends der Werthe von beyden Rational werde, die Seite des ersten $z - y$, und des anderen $t - x$ nemmen; denn solchergestalt kommet diese Gleichung heraus.

$$yy + 1 = zz - 2zy + yy$$
$$1 = zz - 2zy$$
$$1 + 2zy = zz$$
$$2zy = zz - 1 \quad \Big\{ \; 2z$$
$$2zy \quad \Big| \quad y = zz - 1 : 2z$$
$$* \quad *$$

In welcher ihr nur yy subtrahiren, $2zy$ zu dem übergebliebenen addiren, von der Summe $1 + 2zy = zz$ das 1. subtrahiren, und das übergebliebene $2zy = zz - 1$ durch $2z$ dividiren dörffet, so giebet der Quotient $y = zz - 1 : 2z$ den Werthe von y.

Auf gleiche Weise wird auch die andere Gleichung aufgelöset:

$$xx + 1 = tt - 2tx + xx$$
$$1 = tt - 2tx$$
$$1 + 2tx = tt$$
$$2tx = tt - 1$$
$$x = tt - 1 : 2t$$

Man subtrahiret nemlich xx, zu dem übergebliebenen $1 = tt - 2tx$ addiret man $2tx$, von der Summe subtrahiret man 1, und dividiret das übergebliebene $2tx = tt - 1$ durch $2t$; denn solchergestalt giebet der Quotient $x = tt - t : 2t$ den Werthe von x, wie vorhin.

Nun, obschon alle Bedingnissen der Aufgabe erfüllet worden, sind dennoch zwey unbekannte übrig geblieben, welche ihr erst, zwar nach Belieben, determiniren müsset.

Es sey $z = 2$, und $t = 3$, da ist $yy = 4 - 1 : 4 = \frac{3}{4}$, und $x = 9 - 1 : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Ferners sey $z = 3$, und $t = 4$, so ist $y = 9 - 1 : 6 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ und $x = 16 - 1 : 8 = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

§. IX.

Zwey vollkommene Quadrate zu finden, Deren Differenz einer gegebenen Zahl gleich ist.

Aufgabe.

66.) Zwey Spieler wurden gefragt: wie viel ein jeder gewonnen habe? der eine Antwortet: die Zahl unserer Gewiñe sind zwey vollkomene Quadrate, deren Differenz 10 ist. Man fragt nach eines jeden Gewinne?

Auflösung.

Es sey der geringere Gewinn $= x$, der grössere $x + y$, die Differenz $10 = d$. so ist das kleine quadrat $= xx$, und das grosse $xx + 2xy + yy$. nach abgezogenen kleineren von dem grösseren quadrate, bleibet die Differenz, und folgends diese Gleichung übrig:

$$yy + 2xy = d$$
$$2xy = d - yy$$
$$y = d - yy : 2y.$$

In welcher ihr nur yy subtrahiren, und das übergebliebene $2xy = d - yy$ durch $2y$ dividiren dörffet, so giebet der quotient $x = d - yy : 2y$ den gesuchten Werthe von x, und erfüllet alle Bedingnissen.

Dessen aber ungeachtet, bleibet dennoch ein unbekannte y übrig, welche

welche zu determiniren ist; ihr könnet aber in die Stelle von y eine Zahl nach belieben annehmen, wenn sie nur nicht grösser, als 3 ist; denn, weil sich yy von d abziehen lässet, muß y kleiner als $\sqrt{}$ d seyn, das ist, y muß kleiner seyn, als die Quadrat-Wurzel von 10, welche beynahe 3. ausmacht.

Es sey demnach y = 3, so ist $x = d - yy = 10 - 9 : 6 = \frac{1}{6}$ folgends ist $x + y = 3 + \frac{1}{6}$.

Anmerkung.

67.) Wir haben die Seite des grossen Quadrates x + y, und nicht blos y angenommen, damit der Werthe von x Rational bleiben sollte.

§. X.

Aus dem gegebenen Preisse etlicher vermischlichen Grössen von verschiedenen Werthe zu bestimmen, wie viel man von den geringeren zu den besseren mischen muß, damit man die vermischte vor einen verlangten Preiß geben kan.

Aufgabe.

60.) Ein Weinhändler hat vier Sorten Wein: einen um 8. kreutzer, den anderen um 10. kr. den dritten um 18. kr. und den vierten um 20. kr. die Maaß. Er verlangt zu wissen, wie viel er von dem geringeren zu dem besseren giessen muß, damit er die Maaß um 15. kr. geben kan.

Auflösung.

Es sey 8 = a
10 = b
18 = c
20 = d und der mittlere Preiß = 15 = m

Nehmet

Nehmet die Unterscheide der vier gegebenen Preissen gegen den mittleren, so bekommet ihr diese vier folgende Gleichungen:

$$a = m - 7$$
$$b = m - 5$$
$$c = m + 5$$
$$d = m + 3$$

Multiplicieret die erste Gleichung $a = m - 7$ durch 5, und die lezte $d = m + 5$ durch 7, addiret beyde Producte $5a = 5m - 35$ und $7d = 7m + 35$ zusamen, so giebet die Summe $5a + 7d = 12m$, wie aus der folgenden Operation erhellet:

$$\begin{array}{l} a = m - 7 \\ d = m + 5 \\ \hline 5a = 5m - 35 \\ 7d = 7m + 35 \\ \hline 5a + 7d = 12m * \end{array}$$

Multiplicieret auch ferners die beyden anderen Gleichungen, nemlich b durch 3, und c durch 5, und addiret die Producte, welche herauskommen, $3b = 3m - 15$, und $5c = 5m + 15$ zusammen, so giebet die Summe $3b + 5c = 8m$. die Operation stehet, wie folget:

$$\begin{array}{l} b = m - 5 \\ c = m + 3 \\ \hline 3b = 3m - 15 \\ 5c = 5m + 15 \\ \hline 3b + 5c = 8m * \end{array}$$

Endlich addiret diese leztere Summe zu der ersten, so kommet $5a + 3b + 5c + 7d = 20m$ heraus.

Aus dieser Summe erhellet, daß man bey einer Vermischung von 20. Maß Wein, 5. Maß um 8. kr., 3. Maß um 10. kr., 5. Maß um 18. kr., und 7. Maß um 20. kr. nehmen könne.

53.) Damit ihr aber wissen möget, ob die Vermischung richtig sey, dörffet ihr nur die 20. Maß durch den Preisse 15 multipliciren, und das Product 300 gegen der Summe der übrigen halten, so könnet ihr wahrnehmen, daß, weil 5. Maß um 8. kr. 40, 3. Maß um 10. kr. 30, 5. Maß um 18. kr. 90, und 7. Maß um 20. kr. 140. Kreutzer betragen, diese zusamen 300. Kreutzer, wie jenne ausmachen, folgends, daß die vorgehabte Vermischung ganz richtig sey

5 M. um 8. kr.	⸗ ⸗	40.	
3 M. um 10. kr.	⸗ ⸗	30.	
5 M. um 18. kr.	⸗ ⸗	90.	15
7 M. um 20. kr.	⸗ ⸗	140.	20
		300	300

Die Ursache dessen ist leicht zu errathen; denn, was ihr bey Verwechselung der Unterscheiden einseits verliehret, das wird euch anderseiths wieder ersetzet, dergestalt, daß ihr nichts gewinnet, und nichts verlieret; Z. E. wenn ihr 5 Maß Wein, wessen Preiß 8 kr. ist, um 15 kr. ausschencket, so gewinnet ihr zwar 5 mahl 7 kr. = 35 kr.; hingegen aber verlieret ihr eben auch 35 kr. an dem anderen Wein, den ihr, obschon die Maß 20 kr. Werth ist, um 15 kr. ausschenket; denn da ihr 7 Maß um 20 kr. einmischet, und für die Maß nur 15 kr. empfanget, verliehret ihr an 7 Masen 15 kr. nun aber machen 5 mahl 7 kr. Gewinn, und 7 mahl 5 kr. Verlurst keinen Gewinn, und keinen Verlurst; folgends ist diese Vermischung ganz richtig.

54.) Ihr seyd auch nicht an diese Vermischung allein gebunden; denn, weil ihr zwey geringere, und zwey bessere Weine habet, könnet ihr nach Belieben die Vermischung anstellen, wenn ihr

nur allezeit Wechselweis mit den Unterscheiden, die sich unter dem Mehr- und Minder-zeichen befinden, und einer jeden Gleichung eigen sind, die Multiplication vornehmet. Dennoch könnet ihr, wenn ihr nicht gerne 7. Maß von dem Wein, wessen Preiß 20 kr. ist, geben wollet, anstatt der obigen Vermischung diese haben:

$$a = m - 7$$
$$b = m - 5$$
$$c = m + 3$$
$$d = m + 5$$

$a = m - 7$	$b = m - 5$
$c = m + 3$	$d = m + 5$
$3a = 3m - 21$	$5b = 5m - 25$
$7c = 7m + 21$	$5d = 5m + 25$
$3a + 7c = 10m \ast$	$5b + 5d = 10m \ast$

$$3a + 5b + 7c + 5d = 20m$$

In welcher ihr anstatt 7 nur 5 Maß von dem besten Wein geben dörffet.

Probe

Denn $24 + 50 + 126 + 100 = 300.$ und $20. 15 = 300.$ folgends ist diese Vermischung eben so richtig als die vorige.

Das

Das Vierte Capitel.

Von Auflösung der quadratischen Gleichungen, und Aufgaben des anderen Grades.

§. I.

Von den verschiedenen Nahmen der Gleichungen.

70.) Wir nennen zusamen-gefügte Gleichungen, in welchen die unbekannte Grösse nach verschiedenen Graden erhoben wird. $xx + ax = bc$ ist ein zusamen-gefügte Gleichung des anderen Grades; weil das unbekante x in dem ersten Gliede auf den anderen Grad erhoben worden; hingegen ist $x^3 + ax^2 + bx = abb$ ein zusamen-gefügte Gleichung des dritten Grades, weil x^3 in dem ersten Gliede sich auf die dritte Potenz erhebet. Dahero führen die zusamen-gefügte Gleichungen ihre Nahmen von dem höchsten Grade der Potenz, auf welchem sich die unbekannte Grösse befindet: so wird $xx + ax = bc$ ein quadratische, $x^3 + ax^2 + bx = abb$ ein cubische, $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = abcc$ ein biquadratische Gleichung genennet; weil die unbekannte in der ersten x^2 ein Quadrat, in der anderen x^3 ein Cubus,

und

und in der dritten x^4 ein Biquadrat ist. Man nennet sie auch Gleichungen des anderen, dritten, vierten, und fünfften Grades, nach Maß, daß die unbekannte sich in einer höheren Dignität befindet.

Ordentliche Gleichungen heissen diejenige, in welchen die Glieder ihre Ordnung behalten, dergestalt, daß der höchste Grad der unbekannten in dem ersten Gliede zustehen kommet, und die übrigen im absteigen ihrer natürlichen Reihe nach die mindere auf die höhere folgen. $x^4 + bx^3 + ccx^2 + d^3x = fg$ ist ein ordentliche Gleichung des vierten Grades; weil die unbekannte x^4 in dem andern Gliede x^3, in dem dritten x^2, und in dem vierten x^1 nach der natürlichen Ordnung absteiget. Wenn diese Ordnung unterbrochen wird, verliehret die Gleichung ihren Nahmen, und heisset unordentlich. Im Falle, wo der Gleichung in der Mitte ein Glied fehlet, gleichwie dieser: $x^4 + a^2cx^2 + bbcx = ffg$, in welcher das andere Glied abgehet, wird dennoch die Gleichung, weil die übrigen Glieder ihre Ordnung behalten, ordentlich geheissen.

71.) Wir nennen quantitates imaginarias, oder erdichtete Grössen, die in sich selbst unmöglich sind. Z. E. Diene uns $\sqrt{-a}$, welches ein erdichtete Grösse ist; weil es allerdings nicht möglich seyn kan, daß man ein wahre Grösse, sie sey Rational- oder Irrational ausfindig mache, die in sich selbst multipliciret zum Producte das Quadrat $-a$ gebe; denn die Wurzel dieses Quadrates hätte ja entweder das Mehr- oder das Minder-Zeichen haben müssen; wäre es aber das Mehr-Zeichen gewesen; so ware im Producte $+a$, und nicht $-a$ heraus gekommen; weil $+ \times + = +$. Setzet ihr aber, die Wurzel habe das Minder-Zeichen gehabt, so hätte das Product abermahl das Mehr-Ze chen haben müssen; denn $- \times - = +$. Deswegen lässet sich überhaubt schliessen, daß die mit $-$ bezeichnete, und unter einem Wurzel-zeichen stehende grössen quantitates imaginariæ seyen; dennoch erstrecket sich diese Lehre nur auf jenne Wurzel-zeichen deren Exponente ein gerade Zahl ist.

§. II.

Von ordentlicher Einrichtung der quadratischen Gleichung.

72.) Denmach wir in dem vorhergehenden Capitel die leichtesten Regeln der Algebra von den niedrigsten Gleichungen erkläret, und bey allerhand Aufgaben angebracht haben; so wollen wir jezt die übrigen von den höheren, und zwar dahier von den quadratischen Gleichungen vortragen; denn man kan diese nicht, wie jenne durch die gewöhnliche Wege, oder die in dem vorhergehenden Capitel gegebene Regeln auflösen; es sind andere Vortheile vonnöthen bis man zu derselben Erkanntnis gelanget.

73.) Damit ihr aber die quadratische Gleichungen aufzulösen erlernen möget, müsset ihr erst die Gleichung ordentlich einrichten, das ist, die Glieder dergestalt nach einander setzen, daß sie in ihrer natürlichen Ordnung auf einander folgen; hernach aber alle Glieder der anderen Seite in die erste übertragen; wenn dieses geschiehet, wird das andere Glied auf ein o. gebracht, oder einer Nulle gleich gemacht. Z. E. Wollen wir setzen, es sey $x = a$, und $x = b$. subtrahiret dahier a, und dort b, so verwandelet sich die erste in $x - a = o$, und die andere in $x - b = o$; allwo das andere Glied $= o$ ist. Wenn ihr jezt eine in die andere, das ist, das erste Glied der einen in das erste Glied der anderen multipliciret, so kommet im Producte diese Gleichung, davon die Producenten $x - a = o$, und $x - b = o$ waren, heraus.

$x = a$	A.	$x = b$
$x - a = o$		$x - b = o$

$$\begin{array}{l} x - a = o \\ x - b = o \\ \hline xx - ax \\ \quad - bx + ab = o \\ \hline xx - ax + ab = o \\ \quad - bx \end{array}$$

Dannenhero, wenn ihr diese Gleichung wieder auflösen sollet, müsset ihr die Producenten, von welchen dieses Product heraus gekommen, wieder finden; wobey ihr ferners wahrnehmen könnet, daß die höhere Gleichungen so viel Werthe enthalten, als derselben Exponente Einheiten in sich begreiffen.

74.) Die Producenten einer Gleichung werden Wurzeln derselben genennet; es ist aber die Wurzel der Werth der unbekannten Grösse in einer Gleichung: Wenn diese Wurzel das Mehr-zeichen führet, so heisset sie ein wahre Wurzel; hingegen wird sie falsche genennet, wenn sie mit − bezeichnet ist: also ist $x = 3$ ein wahre, und $x = -3$ ein falsche Wurzel.

75.) Mehrere Glieder einer unbekannten grösse in einerley Grade werden nur für ein Grade gehalten, und unter einander geschrieben; solchergestalt sind die in der mit A bezeichneten Gleichung befindliche Glieder $-ax$ und $-bx$ nur für ein Gliede anzusehen.

76.) Zu mehrerer Ubung wollen wir setzen, es sey $x=a$ ein wahre, und $x = -b$ ein falsche Wurzel; da wird $x - a = o$, und $x + b = o$; folgends die eingerichtete Gleichung $\begin{array}{l} xx - ax \\ \quad + bx \end{array}$ $- ab = o$ wie aus der nachstehenden Operation erhellet:

$$\begin{array}{ccc} x = a & B & x = -b \\ \hline x - a = o & & x + b = o \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - a = o \\ x + b = o \\ \hline xx - ax \\ \quad + bx - ab = o \\ \hline xx - ax - ab = o \\ \quad + bx \end{array}$$

In der ersten Gleichung zur linken wird das a subtrahiret, und in der anderen zur rechten das b. addiret; wenn dieses geschehen, so ist die eine $x - a = o$, und die andere $x + b = o$. Hernach multipliciret eine durch die andere, das ist, $x - a$ durch $x + b$, so komet im Producte ein quadratische Gleichung $\begin{array}{l} xx - ax - ab = o \\ \quad + bx \end{array}$ heraus, welche für ihre Wurzeln $x - a = o$, und $x + b = o$ hat.

§. III.

Die Natur der Gleichungen, und ihre vornehmste Eigenschafften zu untersuchen.

77.) Damit ihr die Eigenschafften der Gleichungen, und ihre Natur deutlich erkennen möget, will ich dieselbe mit einigen Exempeln erläuteren, und zur diesem Ende nachstehende einfache Gleichungen in einander multipliciren; da werden die quadratische herauskommen, deren reiffere Betrachtung euch ihre Eigenschafften offenbahren wird.

I.

$$\begin{array}{l} x - 4 = o \\ x + 2 = o \\ \hline xx - 4x \\ \quad + 2x - 8 = o \\ \hline xx - 2x - 8 = o \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} x + 4 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ \hline xx + 4x - 8 = 0 \\ - 2x \quad\quad\quad \\ \hline xx + 2x - 8 = 0 \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax + ab = 0 \\ \quad - xb \end{array}$$

IV.

$$\begin{array}{l} x + a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline xx + ax + ab = 0 \\ \quad + bx \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{l} x + 4 = 0 \\ x - 4 = 0 \\ \hline xx + 4x - 16 = 0 \\ \quad - 4x \\ \hline xx * - 16 = 0 \end{array}$$

78.) Wenn ihr diese Gleichungen, die ihr nach belieben auf höhere Grade erheben könnet, genau betrachtet; so werdet ihr mit dem Harriot, und Cartesio wahrnehmen, daß

I. Das dritte Glied, wenn eine Wurzel falsch und die andere wahr ist, allezeit das Minder-zeichen führe. 2.) und, wenn die wahre Wurzel grösser als die falsche ist, das andere Glied mit dem

Minder-hingegen, wenn diese grösser als jenne ist, mit dem Mehr-zeichen bemerket werde.

II. Daß, ein jede Gleichung so viel Wurzeln, als das erste Glied Abmessungen, oder der Exponente der Dignität desselben Gliedes Einheiten in sich begreiffet, enthalten müsse. Z. E. In den quadratischen Gleichungen ist der Exponente 2, und die Zahl der Wurzeln ist auch 2. Es sind aber in einer jeden Gleichung so viel wahre Wurzeln, als Abwechselungen der Zeichen sind; hingegen sind so viel falsche, als einerley Zeichen auf einander folgen. Z. E. dienen die zwey obige erste Gleichungen.

III. Daß, wenn die beyden Wurzeln wahre, oder beyde falsche sind, der Coefficient des anderen Gliedes der Summe aller Wurzeln gleich sey. Hingegen, wenn die eine Wurzel wahr, und die andere falsch ist, muß der Coefficient des anderen Gliedes die Differenz der beyden bekannten grössen seyn.

IV. Daß das lezte Glied in einer jeden Gleichung aus den bekannten grössen, welche das Producte aller bekannten Wurzeln in einander sind, bestehen müsse.

V. Daß, wenn alle Wurzeln in einer Gleichung wahre sind, die Glieder das Mehr- und Minder-zeichen mit einander abwechseln; hingegen, wenn alle falsche sind, führen alle Glieder das Mehr-zeichen.

VI. Daß der Fehler eines Gliedes von den wiedrigen Zeichen der wahren und falschen Wurzeln herkomme. In dem fünfften Exempel fehlet das andere Glied, wie solches das Sternlein andeutet, welches man jederzeit in die Stelle der Glieder setzet, die da fehlen. Dannenhero, wenn die wahre Wurzel der falschen gleichet, wird das andere Glied gleich einer Nulle, und das dritte führet das Minder-zeichen.

79.) Damit euch aber die Vorstellung der Gleichungen noch eutlicher werde, wollen wir den Coefficienten des anderen Gliedes

=n,

= n, und das dritte = p machen; denn solchergestalt lassen sich mit grossem Vortheile alle Gleichungen des anderen Grades in diese vier folgende Formulas verfassen.

I.

$$xx - nx + p = 0$$

II.

$$xx + nx + p = 0$$

III.

$$xx - nx - p = 0$$

IV.

$$xx + nx - p = 0$$

Die erste Formul will andeuten, daß die beyde Wurzeln wahre, die andere, das beyde falsche; die dritte, daß ein Wurzel wahr, und die andere falsch; die wahre aber grösser, als die falsche; und die vierte, daß die falsche grösser, als die wahre sey.

Anmerkung.

80.) Ich will dahier nichts von dem fünfften Falle melden, wo das andere Glied wegen wiedrigen Zeichen auf ein 0, oder Nulle gebracht wird; denn derselben Auflösung ist so leicht, daß sie kein fernere Vorbereitung vonnöthen hat. Ihr dörffet nemlich nur die bekannte grösse in das andere Glied übertragen, und auf beyden Seiten die Quadrat-Wurzel ausziehen so ist geschehen, was man verlangete. Es sey z. E. die Gleichung: $xx - 16 = 0$ setzet 16 durch die Addition in das andere Glied, und ziehet aus der Summe $xx = 16$ die Quadrat-Wurzel, so ist $x = 4$ die wahre, und $x = -4$ die falsche Wurzel.

§. IV.

§. IV.

Von den Gleichungen der Imaginarischen Wurzeln.

81.) Es giebet zwey verschiedene Gattungen der imaginarischen Wurzeln: einige werden einfache, und die anderen vermischte benahmet. Einfache sind, welche nur ein Glied unter dem Wurzel-zeichen haben; gleichwie $\sqrt{-a}$, oder $\sqrt{-4}$. Vermischte sind, welche aus zwey Gliederen bestehen, deren eines National-und vor-das andere aber imaginarisch-und unter dem Wurzel-zeichen stehet; derley sind: $a-\sqrt{-b}$. oder $b+\sqrt{-3}$.

82.) Bey einer quadratischen Gleichung ohne Wurzel-zeichen, die einige einfache Wurzeln in sich begreiffet, sind beyde Wurzeln imaginarisch und gleiche; dennoch mit der Beschaffenheit, daß die eine das Minder-und die andere das Mehr-Zeichen vor dem Wurzel-zeichen führet. In diesem Falle muß in der Gleichung das andere Glied fehlen, und das dritte allezeit mit + bezeichnet werden: wie aus diesem Exempel erhellet:

$$x-\sqrt{-b}=0$$
$$x+\sqrt{-b}=0$$

$$xx-x\sqrt{-b}$$
$$+x\sqrt{-b}--b=0$$

$$xx \quad * \quad * \quad b=0$$

Nun

Nun lasset uns darthun, daß in dem Falle, wo die Wurzeln imaginarisch- und gleiche sind, das dritte Glied allezeit das Mehr-zeichen haben müsse. Wir wollen setzen, wie vorhin: $x - \sqrt{-b} = 0$, und $x + \sqrt{-b} = 0$. durch die Multiplication einer Wurzel in die andere, kommet im Producte von x durch x heraus xx, von x durch $-\sqrt{-b}$ aber $-x\sqrt{-b}$, und von x durch $+\sqrt{-b}$ wie zuvor $+x\sqrt{-b}$. Da wird also das andere Glied wegen den wiedrigen Zeichen gleich einer Nulle. Wenn dieses geschehen, so multipliciret ferner $-\sqrt{-b}$ durch $+\sqrt{-b}$, das ist, multipliciret erst $-$ durch $+$; weil diese vor dem Wurzel-zeichen stehen, so giebet das Product $-$; denn $- \times + = -$; hernach multipliciret auch $\sqrt{-b}$ durch $\sqrt{-b}$, so kommet im Producte $-b$ heraus (in dem ersten Theil Cap. VI. §. VII.) folgends ist das ganze Product von $-\sqrt{-b}$ durch $+\sqrt{-b}$ zusammen $- - b$. Es will aber $- - b$ andeuten, daß man den Fehler $-b$ von $- - b$ abziehen soll; dieses geschiehet, wenn man anstatt $- -$ das $+$ setzet, weil $+$ dem $-$ zu wieder ist; folgends muß das dritte Glied allezeit das Mehr-zeichen haben.

§. V.

Aus der gegebenen Differenz zweyer imaginarischen Zahlen, und dem Producte einer Zahl in die andere die Zahlen selber zu finden.

Aufgabe.

83.) Ein Mathematicus dencket zwey verschiedene Zahlen, deren Differenz nur $2\sqrt{-4}$ ist, das Producte aber einer in die andere 68 giebet, ihr sollet die Zahlen selber finden.

Auflösung.

Es sey die unbekannte Summe $= 2x$, und das Product $68 = a$, so ist die grosse Zahl $x + \sqrt{-4}$, und die kleine $x - \sqrt{-4}$. multipliciret beyde Zahlen in einander:

$$\begin{array}{l} x + \sqrt{-4} \\ x - \sqrt{-4} \\ \hline xx + x\sqrt{-4} \\ \quad - x\sqrt{-4} - -4 \\ \hline xx \quad * \quad + 4 \end{array}$$

Da ist das Product $xx + 4$ gleich 68; daraus fliesset diese Gleichung:

$$\begin{aligned} xx + 4 &= 68 \\ xx &= 68 - 4 \\ xx &= 64 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

In welcher ihr nur 4 subtrahiren, und aus dem übergebliebenen $xx = 64$ die Quadrat-Wurzel $x = 8$ ausziehen dörffet, so wird die halbe Summe gefunden; dannenhero ist auch die grosse Zahl $8 + \sqrt{-4}$, und die kleine $8 - \sqrt{-4}$.

Probe.

Denn multipliciret $8 + \sqrt{-4}$ durch $8 - \sqrt{-4}$, so kommen in dem Producte 68 heraus, wie aus der folgenden Operation erhellet:

$$8 + \sqrt{-4}$$
$$8 - \sqrt{-4}$$

$$64 + 8\sqrt{-4}$$
$$- 8\sqrt{-4} - -4$$

$$64 \quad * \quad + 4 = 68$$

Folgends sind alle Bedingnissen der Aufgabe erfüllet, W. Z. Th.

Die I. Anmerkung.

84.) Wenn eine Gleichung des anderen Grades, die ohne Wurzel-Zeichen stehet, einige vermischte imaginarische Wurzeln enthält; so sind zwar die beyden Wurzeln auch imaginarisch und gleiche, dennoch mit dieser Bedingnis, daß die Wurzel-Theile vor dem Wurzel-Zeichen verschiedene- und die imaginarische Grössen einerley Zeichen führen. In diesem Falle, hat die Gleichung all ihre erforderliche Glieder wie aus den folgenden Exempeln erhellet:

$$x + a - \sqrt{-b}$$
$$x - a + \sqrt{-b}$$

$$xx + ax - x\sqrt{-b}$$
$$+ ax + x\sqrt{-b} + aa - a\sqrt{-b}$$
$$+ a\sqrt{-b} - -b$$

$$xx + 2ax \quad * \quad + aa \quad * \quad + b$$

$$xx + 2ax + aa$$
$$+ b$$

II.

$$x - a - \sqrt{-b}$$
$$x - a + \sqrt{-b}$$

$$xx - ax - x\sqrt{-b}$$
$$- ax + x\sqrt{-b} + aa + a\sqrt{-b}$$
$$- a\sqrt{-b} - - b$$

$$xx - 2ax \quad * \quad + aa \quad * \quad + b$$

$$xx - 2ax + aa = 0$$
$$+ b$$

Die II. Anmerkung.

85.) Wenn die Rational-Grössen das Minder-Zeichen führen, so hat das andere Glied auch $-$; haben aber dieselbe das Mehr-Zeichen, so hat dieses auch $+$. Das dritte Glied hat allezeit $+$.

Die III. Anmerkung.

86.) Machet den Coefficienten des anderen Gliedes $= n$, und das dritte Glied $= p$. so bekommet ihr für den ersten Falle diese:

$$xx + nx + p = 0$$

und für den anderen diese Formul:

$$xx - nx + p = 0.$$

Welche denen in dem vorgehenden §. angeführten Formulen gänzlich gleichen; jenne zwar den falschen, und diese den wahren Wurzeln.

§. VI.

§. VI.
Von Verwandelung der Gleichungen.

87.) Eine Gleichung verwandeln ist dieselbe in ein andere vergestalten, dennoch mit dieser Bedingnis, daß die Wurzeln der neuen Gleichung denen der ersten gleiche bleiben, oder wenigstens ein bekannte Verhältnis gegen einander behalten.

Es sey gegeben: $xx + nx + p = o$. setzet y in die Stelle von x; so wird $yy + ny + p = o$ der ersten gänzlich gleichen.

Wenn ihr aber $x = y + a$ machet, und in die Stelle x seinen Werthe $y + a$ setzet, so kommet diese Gleichung heraus.

$$\begin{array}{ll} xx = & yy + 2ay + aa = o \\ nx = & \quad\quad ny + na \\ + p = & \quad\quad + p \end{array}$$

Woraus erhellet, daß die Wurzeln der Neuen kleiner sind, als die ersten Gleichung, und zwar um die bekannte Grösse a, weil $y = x - a$ ist.

Hingegen, wenn ihr $x = y - a$ machet, und $y - a$ in die Stelle x setzet, so sind die Wurzeln der neuen grösser, als die in der ersten Gleichung waren, und zwar um die bekannte Grösse a, weil $y = x + a$ ist.

88.) Solchergestalt könnet ihr die Wurzeln der Gleichung $xx + nx + p = o$ nach Belieben verminderen, oder vermehren; dennoch mit der Bedingnis, daß, wenn ihr alsdenn die neue Gleichung auflösen, und ihre Wurzeln untersuchen wollet, ihr die bekannten

ten

ten Grössen, die diese Wurzel kleiner oder grösser, als die gegebene waren, gemacht haben, subtrahiren, oder nach Beschaffenheit des Falles addiren müsset, denn wiedrigen Falles würdet ihr den gesuchten Werth der gegebenen Wurzeln nicht richtig erlangen. Deswegen, wenn ihr $x = y + a$ gesetzet, und den Werth von $y = 3$ bekommen habet, ist euch der Werth von x auch bekannt; denn, weil $a = 2$ ist, wird $x = 3 + 2$. Ingleichen, wenn ihr $y = \frac{x}{a}$ machet, und aus dem Producte $ay = x$ in die Stelle von x seinen Werthe ay übertraget, so kommet $aayy + any + p$. heraus, da sind alsdenn die Wurzeln der neuen Gleichung gleich denen gegebenen durch a dividiret; denn $y = \frac{x}{a}$. u. s. w.

§. VII.

Aus einer gegebenen Gleichung die Irrational-Grössen abzuschaffen.

89.) Insgemein kan man aus einer gegebenen Gleichung die Irrational-Grössen nicht leichter abschaffen, als wenn man die Gleichung zu einer höheren Potenz, als die dritte ist, erhebet: weil aber unser Vorhaben sich nur auf den dritten Grad erstrecket, so will ich dahier nichts von dieser Methode melden. Unterdessen giebet es gewisse Fälle, wo man die Irrational-Grössen abschaffen kan ohne die Gleichungen zu höheren Graden zu erheben: deswegen erachte ich nützlich zu seyn dieselbe umständlich zu erklären.

90.) In dieser Absichte sey uns gegeben $xx - x\sqrt{n} + q = 0$. allwo die Irrational-Grösse sich in dem anderen Gliede befindet. Wenn ihr diese Gleichung genauer einsehet, werdet ihr mit mir wahrnehmen,

nehmen, daß beyde Wurzeln derselben mit dem Wurzel-Zeichen behafftet seyn müssen, anerwogen, wenn nur ein Irrational-Wurzel vorhanden wäre, das dritte Glied auch ein Wurzel-Zeichen haben müste, welches sich dennoch nicht also befindet.

Damit aber dieses euch annoch deutlicher werde, will ich ein Exempel anführen, und nur in Gedancken für ein kleine Weyle dafür halten, es seyen beyde Wurzeln $x - a\sqrt{c}$, und $x - a\sqrt{c}$; hernach eine in die andere multipliciren

$$\begin{array}{l} x - a\sqrt{c} \\ x - a\sqrt{c} \\ \hline xx - ax\sqrt{c} \\ \quad - ax\sqrt{c} + ac \\ \hline xx - 2ax\sqrt{c} + ac = 0 \end{array}$$

Da erhellet aus dem Producte, welches herauskommet, daß das Wurzel-Zeichen, obwohlen beyde damit behafftet sind, in dem dritten Gliede kein Platz finde.

91.) Setzen wir hingegen, es sey ein Wurzel $x - a\sqrt{c}$ mit- und die andere $x - a$ ohne Wurzel-Zeichen gegeben: so wird durch die Multiplication ganz klar, daß in diesem Falle das Product im anderen und dritten Gliede ein Wurzel-Zeichen hervorbringe:

$$\begin{array}{l} x - a\sqrt{c} \\ x - a \\ \hline xx - ax\sqrt{c} + aa\sqrt{c} = 0 \\ \quad - ax \end{array}$$

92.) Wenn ihr dieses zum voraus erweget, so werdet ihr ferner wahrnehmen, daß, damit das Wurzel-Zeichen aus einer Gleichung abgeschaffet werde, ihr nur die beyden Wurzeln durch die Wurzel-grösse multipliciren dörffet. Dieses lässet sich auch mit geringer

Mühe

Mühe durch die zwey gegebene Wurzeln $x - a\sqrt{c}$ und $x - a\sqrt{c}$ gerechtfertigen: denn multipliciret $x - a\sqrt{c}$ und $x - a\sqrt{c}$ durch $\sqrt{c}$, und die herauskommende Producte $x - ac$ und $x - ac$ durch einander, so giebet das lezte Product $xx - 2acx + aacc = 0$. eine Gleichung, aus welcher auf diese Weise die Irrational-grössen sind abgeschaffet worden.

93.) Eben also, wenn ihr aus der gegebenen Gleichung $xx - x\sqrt{n} + q = 0$ die Irrational-grösse $\sqrt{n}$ abschaffen sollet, müsset ihr die Wurzeln derselben durch $\sqrt{n}$ multipliciren, und $x\sqrt{n} = y$ machen; denn solchergestalt wird $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$ demnach setzet in die Stelle x seinen Werthe $\frac{y}{\sqrt{n}}$, so komt ein neue Gleichung heraus, in welcher ihr nur alle Glieder durch den Nenner n multipliciren dörffet; solchergestalt giebet das Producte $yy - ny + nq = 0$. eine Gleichung ohne Wurzel-Zeichen:

$$x = \frac{y}{\sqrt{n}}$$

$$xx = \frac{yy}{n}$$

$$- x\sqrt{n} = - \frac{y\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$+ q = + q = 0.$$

§. VIII.

§. VIII.

Die quadratische Gleichungen, des ersten Falles aufzulösen.

94.) Alles, was wir bisher von den quadratischen Gleichungen gelehrt haben, ist zu dem Ende geschehen, damit wir dieselbe völlig auflösen, das ist, den Werthe der unbekannten grösse finden mögen, welches nun in den folgenden §. §. gezeigt werden solle. Da wisset ihr aber zuvor aus dem vorhergehenden §. III. n. 79. daß alle Fälle der quadratischen Gleichungen sich in diese vier Formulen verfassen lassen:

$$xx - nx + p = o$$
$$xx + nx + p = o$$
$$xx - nx - p = o$$
$$xx + nx - p = o$$

Wir wollen den Anfang bey der ersten Formul machen.

95.) Diese ist: $xx - nx + p = o$. setzet die Summe der beyden Wurzeln sey $= 2a$, ihr Unterscheid $= 2d$; da ist die erste: $a + d$, und die andere: $a - d$. setzet ferner $z = a + d$, und $z = a - d$; so kommet durch die Versetzung $z - a - d = o$ und $z - a + d = o$ heraus. Wenn ihr jezt eine in die andere multipliciret, wie dahier:

$$z - a - d = o$$
$$z - a + d = o$$

$$zz - az - dz$$
$$- az + aa + ad$$
$$+ dz - ad - dd = o$$
$$zz - 2az + aa - dd = o$$

$$zz - 2az + aa = o.$$
$$- dd.$$

N

So kommet eine Gleichung zum Vorscheine, die der Formul an allen Gliederen gleichet.

Wenn ihr jezt die Glieder der ersten mit den Gliederen der anderen vergleichet, so wird $xx = zz$ und $-nx = -2az$, oder durch Versetzung $2az = nx$, und, weil $x = z$, ist $2a = n$, folgends $a = \frac{1}{2}n$. Das dritte Glied könnet ihr allezeit $= p$ machen, demnach ist $aa - dd = p$. addiret dd, und subtrahiret p von der Summe $p + dd = aa$; so bleibet $dd = aa - p$ übrig. Nun, weil $a = \frac{1}{2}n$ ist, muß $aa = \frac{1}{4}nn$ seyn; folgends, wenn ihr $\frac{1}{4}nn$ in die Stelle aa der Gleichung $dd = aa - p$ setzet, so kommet $dd = \frac{1}{4}nn - p$, und nach ausgezogener Quadrat-Wurzel $d = \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ heraus. Wenn ihr solchem nach die Werthe von a und d in die Gleichungen: $z - a - d = o$, und $z - a + d = o$ übertraget, so kommet für die erste $z - \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = o$ und für die andere $z - \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = o$. heraus. folgends ist $x = z = + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ die erste, und $x = z = + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = o$ die andere Wurzel.

Probe.

96.) Multiplicieret $z - \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = o$ durch $z - \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = o$, und setzet x in die Stelle von z; da beweiset das Product $zz - nz + p = o$, daß die beyde Gleichungen von einerley Beschaffenheit sind; die Operation stehet, wie folget:

$$z - \tfrac{1}{2}n - \sqrt{\tfrac{1}{4}nn - p} = 0$$
$$z - \tfrac{1}{2}n + \sqrt{\tfrac{1}{4}nn - p} = 0$$

$$zz - \tfrac{1}{2}nz - z\sqrt{\tfrac{1}{4}nn - p}$$
$$- \tfrac{1}{2}nz + \tfrac{1}{4}nn + \tfrac{1}{2}n\sqrt{\tfrac{1}{4}nn - p}$$
$$+ z\sqrt{\tfrac{1}{4}nn - p} - \tfrac{1}{2}n\sqrt{\tfrac{1}{4}nn - p}$$
$$- \tfrac{1}{4}nn \qquad + p$$

$$zz - nz \quad * \quad * \quad * \quad + p$$

$$zz - nz + p = 0$$
$$xx - nx + p = 0$$

97.) Wenn ihr die Eigenschafften dieser Formul betrachtet, werdet ihr mit geringer Mühe wahrnehmen, daß, damit die beyden Wurzeln wahre sind, die grösse $\frac{1}{4}nn$ unter dem Zeichen grösser seyn müsse als p, welches unter eben demselben Zeichen stehet; wiedrigen Falles wäre $\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ ein falsche grösse. daraus fliesset, daß, wenn $\frac{1}{4}nn$ grösser als p ist, die beyden Wurzeln Rationale, und im wiedrigen Falle irrationale seyen.

98.) Wir wollen dieses in einem Exempel betrachten; dannenhero sey diese Gleichung: $xx - 9x + 18 = 0$ aufzulösen. Machet $n = 9$ und $p = 18$. setzet die Werthe von n und p in die Formul der gefundenen Wurzeln; da wird $x = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$ die erste, und $x = \frac{9}{2} - \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$ die andere Wurzel.

Probe.

Multipliciret $x - 3 = 0$ durch $x - 6 = 0$; da kommet $xx - 9x + 18 = 0$. heraus

99.) Eben also, wenn ihr $xx - 6x + 20 = 0$ auflösen sollet, dörffet ihr nur $n = 6$, und $p = 20$ machen, und diese Werthe in die Formul setzen, so wird $x = \frac{6}{2} + \sqrt{\frac{36}{4} - 20} = \frac{6}{2} + \sqrt{-\frac{44}{4}}$ $= 3 + \sqrt{-11}$ die erste, und $x = 3 - \sqrt{-11}$ die andere Wurzel.

Anmerkung.

Anerwogen das Quadrate $\sqrt{-11}$ unmöglich ist §. I. n. 71. so sind diese beyden Wurzeln imaginarisch.

§. IX.

Die quadratische Gleichungen des anderen Falles aufzulösen.

100.) Die Formul des andern Falles ist diese: $xx + nx + p = 0$. in welcher, weil das Mehr- und Minder-zeichen nicht ordentlich abwechseln, falsche Wurzeln stecken müssen; deswegen setzet ihre Summe sey $-2a$, und derselben Unterscheid $-2d$. so ist die erste $-a-d$, und die andere $-a+d$. jezt dörffet ihr nur z in die Stelle von x übertragen, so kommet $z + a + d = 0$ die erste, und $z + a - d = 0$ die andere Wurzel, hingegen im Producte einer in die andere $zz + 2az + aa - dd = 0$ eine der gegebenen Formul ganz ähnliche Gleichung heraus. Demnach vergleichet die Glieder, da wird $n = 2a$, $a = \frac{1}{2}n$, $aa = \frac{1}{4}nn$, und $p = aa - dd$. wenn dieses geschehen, dörffet ihr nur dd addiren, und p subtrahiren, hernach aber in dem Reste $dd = aa - p$ in die Stelle von aa seinen Werthe $\frac{1}{4}nn$ setzen, und aus $dd = \frac{1}{4}nn - p$ die Quadrat-Wurzel ausziehen, so kommet $d = \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$

$\sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ zum Vorscheine. Solchergestalt wird die erste $z + a + d = z + \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = o$, und die andere Wurzel $z + a - d = z + \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p} = o$ bekannt; folgends ist $x = z = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ die erste, und $x = z = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}$ die andere Wurzel.

Anmerkung.

Hieraus fliesset, daß, wenn $\frac{1}{4}nn$ kleiner als p ist, die Wurzeln irrationale seynd.

101.) Es sey gegeben $xx + 7x + 12 = o$. machet $n = 7$, und $p = 12$. da ist $x = -\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = -\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -4$ die erste, und $x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -3$ die andere Wurzel, welche beyde zusammen falsche sind.

Es sey ferner $xx + 8x + 18 = o$. machet $n = 8$, und $p = 18$. nemmet diese Werthe wie vorhin, so ist $x = -\frac{8}{2} - \sqrt{\frac{64}{4} - 18} = -\frac{8}{2} - \sqrt{-\frac{8}{4}} = -4 - \sqrt{-2}$ die erste, und $x = -4 + \sqrt{-2}$ die andere Wurzel, welche abermahl beyde mit einander imaginarisch sind.

§. X.

Die quadratische Gleichungen des dritten Falles aufzulösen.

102.) Die Formul des dritten Falles ist: $xx - nx - p = o$. worinne die Ordnung der nicht abwechselnden Zeichen ein falsche Wurzel kleiner als die wahre vorstellet.

Lasset uns für ein kleine Weyle dafür halten, es seyen die beyden Wurzeln wahre, und ihre Summe bestehe in $2a$, ihr Unterscheid aber in $2d$. solchergestalt wird die grössere $a + d$, und die kleinere $a - d$. setzet, weil dieses die falsche ist, $-a + d$ in die Stelle $a - d$, und machet $x = z$, so kommet $z = a + d$ oder $z - d - d = o$ die wahre, und $z = - a + d$ oder $z + a - d = o$ die falsche Wurzel, in dem Producte aber einer in die andere $zz - 2za + aa = o$ zum Vorscheine.
$+ dd$

Wenn ihr die Glieder, wie gewöhnlich, mit einander vergleichet, so wird $- 2d = - n$ oder $2d = n$, $d = \frac{1}{2}n$, $dd = \frac{1}{4}nn$, $- p = - aa + dd$ oder $aa - p = dd$. jezt dörffet ihr nur p addiren, und $\frac{1}{4}nn$ in die Stelle von dd setzen; so wird $aa = \frac{1}{4}nn + p$, und nach ausgezogener Quadrat-Wurzel $a = \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$. folgends $z - a - d = z - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} - \frac{1}{2} = o$ und $z + a - d = z + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} - \frac{1}{2}n = o$. Deswegen ist $x = z = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ die wahre, und $x = z = \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ die falsche Wurzel.

Anmerkung.

In diesem dritten Falle kan kein Irrational-grösse zum Vorscheine komen; weil die Grössen unter dem Zeichen wahre Wurzeln sind.

103.) Es sey gegeben $xx - 3x - 10 = 0$. machet $n = 3$, und $p = 10$. setzet die Werthe von n und p in die Formul, so ist $x = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$ die wahre, und $x = \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = - \frac{4}{2} = - 2$. die falsche Wurzel.

§. XI.

§. XI.

Die quadratische Gleichungen des vierten Falles aufzulösen.

104.) In diesem Falle haben wir diese Formul: $xx + nx - p = o$. die Beschaffenheit der Zeichen giebet zu erkeñen, daß ein falsche Wurzel, welche grösser als die wahre ist, vorhanden sey; deßwegen wollen wir abermahl nur für ein Weyle in Gedanken dafür halten, es seyen beyde Wurzeln wahre, und ihre Summe $2a$, ihr Unterscheid aber $2d$ nennen: da wird in dieser Betrachtung die grössere $a + d$, und die kleinere, $a - d$. demnach dörffet ihr nur, weil die grössere falsch ist, $-a-d$ in die Stelle von $a + d$ setzen, und $z = x$ machen, so kommet $z = -a - d$ oder $z + a + d = o$ die falsche, und $z = a - d$ oder $z - a + d = o$ die wahre Wurzel: in dem Producte aber $zz + 2dz - aa = o$ eine der gegebenen Formul ganz ähnliche Gleichung heraus.
$+ dd$

Wenn ihr diese Glieder mit jennen vergleichet so wird $2d = n$, $d = \frac{1}{2}n$, $dd = \frac{1}{4}nn$, und p oder $-p = -aa + dd$. jezt dörffet ihr nur aa und p addiren, und in die Summe $aa = dd + p$ in die Stelle von dd seinen Wehrte $\frac{1}{4}nn$ setzen, so wird $aa = \frac{1}{4} + p$, und nach ausgezogener Quadrat-Wurzel $a = \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$. deswegen ist $z + a + d = z + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} + \frac{1}{2}n = o$, und $z - a + d = z - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p} + \frac{1}{2}n = o$ folgends $x = z = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ die falsche, und $x = z = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ die wahre Wurzel.

An-

Anmerkung.

Weil die Grössen unter dem Zeichen wahre Wurzeln sind, kan in diesem Falle kein Irrational-grösse zum Vorscheine komen.

105.) Es sey gegeben $xx + 3x - 10 = 0$. ihr sollet die Wurzeln finden. Machet $n = 3$, und $p = 0$. hernach setzet diese Werthe in die Gleichung, so ist $x = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5$ die falsche, und $x = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$ die wahre Wurzel.

Anmerkung.

106.) Alle Gleichungen des anderen Grades können in diese folgende Formulen, welche, wie ihr gesehen, aus denen vorhergehenden §. §. sind ausgezogen worden, verfasset werden.

Gleichungen. **Wurzeln.**

$$xx - nx + p = 0 \begin{cases} x = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \\ x = +\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \end{cases}$$

In dem andern Falle.

$$xx + nx + p = 0 \begin{cases} x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \\ x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn - p}. \end{cases}$$

In dem dritten Falle.

$$xx - nx - p = 0 \begin{cases} x = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}. \\ x = \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}. \end{cases}$$

In dem vierten Falle.

$$xx + nx - p = 0 \begin{cases} x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}. \\ x = -\frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}. \end{cases}$$

§. XII.

Allgemeine Regel die quadratische Gleichungen aufzulösen.

107.) Nachdem ihr jezt die Gleichungen des andern Grades in allen Fällen aufzulösen wisset, werdet ihr vielleicht diese allgemeine Regel für unnütze halten: allein ihr sollet bald erfahren, wie sehr ihr euch in eurer Meinung betrogen, wenn ihr ihren vielfältigen Nutzen verspühren werdet.

Es ruhet aber diese Regel auf einem Grundsatze wessen Erklärung dahier so nutzlich, als nöthig ist: wenn man ein binomische Grösse $x + a$ zum Quadrate erhebet, so enthält dasselbe $xx + 2ax + aa$ drey Glieder, das erste xx ist das Quadrate der unbekannten x; das andere ist ein Product der unbekannten x durch die bekannte a zweymahl genommen $= 2a$, und das dritte ist ein Quadrat aa der bekannten Wurzel a. Nennen wir die bekannte Wurzel zweymal genommen $2a$ Coefficienten des anderen Gliedes, so ist sein helffte a die Wurzel des dritten Gliedes aa. Hieraus fliesset von sich selbst, daß im Falle, wo das dritte Glied in einer Gleichung fehlet, man dasselbe leicht ersetzen könne; denn ihr dörffet nur die helffte des Coefficienten des anderen Gliedes zum Quadrate erheben, und in die Stelle des dritten Gliedes setzen, so ist der Sache genug geschehen. Z. E. Wenn ihr aus $xx + ax = bb$ ein vollkommenes Quadrate machen sollet, so dörffet ihr nur x für den einen, und a

für den anderen Theil der binomischen Wurzel annehmen; hernach aber $\frac{1}{2}a$ zum Quadrate erheben, und $\frac{1}{4}aa$ in die Stelle des dritten fehlenden Gliedes setzen; denn solchergestalt lässet sich die Quadrat-Wurzel ausziehen, und die gegebene Gleichung völlig einrichten. Diese Regel hat ihren vielfältigen Nutzen in Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen, wie ihr aus den folgenden Aufgaben zur genüge ersehen werdet.

§. XIII.

Aus der gegebenen Summe des Quadrates, und der Wurzel etliche mahl genommen, die Wurzel des Quadrates zu finden.

Aufgabe.

108.) Ein Vatter, welcher versuchen wollte, ob sein Sohn einen guten Fortgang in der Algebra mache, verschliesset etliche Ducaten in sein Hand, und verspricht ihm dieselbe zu geben, wenn er auf die Erklärung, daß das Quadrat der Anzahl der Ducaten, und annoch zehenmahl die nemliche Zahl 39 betrage, wie viel es derselben sind, errathen werde. Der Sohn verfertiget eine kleine Rechnung, und findet, daß sein Vatter drey Ducaten in der Hand habe. Man fragt, wie dieses der Sohn habe errathen können.

Auflösung.

Es sey x die unbekannte Zahl der Ducaten. Da ist xx derselben Quadrat, und dessen Wurzel zehenmahl genomen = 10x. daher fliesset diese Gleichung:

$$xx + 10x = 39$$
$$xx + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 8 - 5 = 3$$

Wenn

Wenn ihr die Gleichung $xx + 10x = 39$ recht betrachtet, werdet ihr wahrnehmen, daß dieselbe ein unreine quadratische Gleichung sey; welche man erst zu einem vollkommenen Quadrate machen müsse, bis dieselbe aufgelöset werden könne. Dieses aber geschiehet nach Anweisung n. 107. wenn man die helffte des Coefficienten in dem anderen Gliede $= 10 = 5$ zum Quadrate $= 25$ erhebet, und vermöge n. 4. beyderseiths der Gleichung addiret; denn solchergestalt lässet sich die Quadrat-Wurzel ausziehen, und die völlige Gleichung auflösen.

Probe.

Denn $3 . 3 = 9$, und $3 . 10 = 30$. folgends $30 + 9 = 39$.

109.) Jezt wollen wir eben diese Aufgabe auch nach denen in den vorhergehenden §§ gegebenen Regeln auflösen. Dieses aber werden wir mit geringer Mühe verrichten können, wenn wir erst die andere Seite der Gleichung auf ein o. bringen, und dadurch die Gleichung ordentlich einrichten; dieses geschiehet, wenn 39 beyderseiths subtrahiret werden; denn auf solche Weise bleibet $xx + 10 - 39 = 0$ eine Gleichung des vierten Falles übrig; in welcher ihr nur den Coefficienten des anderen Gliedes $10 = n$, und das dritte $39 = p$ machen, hernach aber die Werthe von n und p in die Gleichung setzen dörffet, so wird $x = -\frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ $= x = -\frac{10}{2} + \sqrt{\frac{100}{4} + 39} = -5 + \sqrt{25 + 39} = -5 + \sqrt{64}$ $= -5 + 8 = 3$. die gesuchte Anzahl der Ducaten, und $x = -\frac{10}{2} - \sqrt{\frac{100}{4} + 39} = -5 - \sqrt{25 + 39} = -5 - \sqrt{64} = -5 - 8$ $= -13$ die falsche Wurzel.

Probe.

Multipliciret $x = 3$ durch $x = -13$, oder $x - 3 = 0$ durch $x + 13 = 0$

$$
\begin{array}{r}
x + 13 = 0 \\
x - 3 = 0 \\
\hline
xx + 13x \\
- 3x - 39 \\
\hline
xx + 10x - 39 = 0
\end{array}
$$

So kommet im Producte $xx + 10x - 39 = 0$ die gegebene Gleichung heraus. W. Z. E.

§. XIV.

Aus der gegebenen Summe deren, zu dem Producte, zweyer Theilen in einander gesezten quadraten und dem einen Theile, die Theile selber zu finden.

Aufgabe.

110.) Zwey Persohnen haben ein gewisse Anzahl grosser Thalern; die eine hat 10; und wenn man die Zahl der ersten durch die andere multiplicieret, und zu dem Producte die quadrate dieser beyden Zahlen addiret, so ist die ganze Summe 124. Thaler. Man fragt, nach der Anzahl der Thalern, welche die andere Persohn gehabt hat.

Auflösung.

Es sey $10 = c$, $124 = b$, und die Zahl der Thalern der andern Persohn $= x$. da ist das quadrat der ersten $= cc$, der anderen $= xx$, und das Product der ersten, in die andere $= cx$. daher fliesset diese Gleichung:

$$cx + xx + cc = b$$
$$cx + xx = b - cc$$
$$xx + cx + \tfrac{1}{4}cc = b - cc + \tfrac{1}{4}cc$$
$$x + \tfrac{1}{2}c = \sqrt{b - cc + \tfrac{1}{4}cc}$$
$$x + \tfrac{1}{2}c = \sqrt{b - \tfrac{3}{4}cc}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{b - \tfrac{3}{4}cc}$$
$$x = -5 + \sqrt{124 - 75}.$$
$$x = -5 + \sqrt{49}$$
$$x = -5 + 7 = 2.$$

In welcher ihr nur beyderseiths cc subtrahiren dörffet, so bleibet $cx + xx = b - cc$ ein unreine quadratische Gleichung übrig, welche erst zu einem vollkommenen quadrate zu machen ist; deswegen wird die helffte des Coefficienten des anderen Gliedes $c = \tfrac{1}{2}c$ zum quadrate $= \tfrac{1}{4}cc$ erhoben, und $\tfrac{1}{4}cc$ auf beyden Seiten addiret; denn solchergestalt lässet sich diese Gleichung völlig einrichten, und die richtige Wurzel ausziehen: $x + \tfrac{1}{2}c = \sqrt{b - cc + \tfrac{1}{4}cc}$. demnach wird die Ausdruckung verbesseret, das ist, man subtrahiret $\tfrac{1}{4}cc$ von dem ganzen quadrate $= cc$; da bleiben $\tfrac{3}{4}cc$ übrig, und ist die verbesserte Gleichung $x + \tfrac{1}{2}c = \sqrt{b - \tfrac{3}{4}cc}$. wenn dieses geschehen, wird auf beyden Seiten $\tfrac{1}{2}c$ abgezogen, und in die übergebliebene Gleichung $x = -\tfrac{1}{2}c + \sqrt{b - \tfrac{3}{4}cc}$ anstatt der Buchstaben ihr Werthe gesetzet; da kommet $x = -5 + \sqrt{124 - 75}$ und nach verbesserter Ausdruckung $x = -5 + \sqrt{49}$ heraus; allwo ihr nur noch die quadrat-Wurzel auszuziehen habet, so wird durch $x = -5 + 7 = 2$ die Zahl der Thalern, welche die andere Persohn hat, bekannt gemacht.

Probe.

Denn $2 . 10 = 20$. und $20 + 100 + 4 = 124$.

111.) Jezt wollen wir eben diese Aufgabe auch nach der andern Methode auflösen. Nehmet die Fundamental-Gleichung $cx + xx + cc = b$. subtrahiret cc, und richtet die Gleichung ordentlich ein, das ist, machet daß der höchste Grad der unbekannten zu erst stehe, und reduciret die andere Seite der Gleichung auf ein o. dieses geschiehet, wenn ihr b subtrahiret, und cc addiret; denn solchergestalt bekommet ihr eine Gleichung des vierten Falles: $xx + cx - b + cc = o$. In welcher ihr nur den Coefficienten des anderen Gliedes $c = n$, und das dritte $- b + cc = p$ machen dörffet, so verwandelet sie sich in diese $xx + nx - p = o$; da nun derselben Wurzeln $x = - \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$, und $x = - \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}nn + p}$ sind; so dörffet ihr nur in der ersten Wurzel an die Stelle der Buchstaben ihre Werthe setzen: $x = - \frac{10}{2} + \sqrt{\frac{100}{4} - 100 + 124} = x = - \frac{10}{2} + \sqrt{\frac{100}{4} + 24} = x = - 5 + \sqrt{25 + 24} = x = - 5 + \sqrt{49} = x = - 5 + 7 = 2$. folgends ist 2 die Zahl der Thalern, welche die andere Persohn gehabt hat, wie vorh.n.

§. XV.

Aufgabe.

112.) Es sind drey Kugel-Pyramiden von verschiedener Anzahl, die erste enthält 37. Kugeln, die andere hat 23 mehr als die dritte: und wenn man das quadrat aus diesen drey Zahlen macht, ist das quadrat der ersten gleich den quadraten der beyden anderen zusamen genommen. Man fraget, wie viel Kugeln die andere und dritte Pyramide enthalte?

Auf-

Auflösung.

Es sey $37 = a$, $23 = b$, und z die Zahl der Kugeln auf der dritten Pyramide; da ist die Zahl der Kugeln auf der andern $z + b$. und das quadrat davon $zz + 2bz + bb$; hingegen ist das quadrat von $a = aa$, und von $z = zz$; da nun das quadrat von $a = aa$ den beyden andern gleichet, so fliesset daher diese Gleichung:

$$2zz + 2bz + bb = aa$$

$$2zz + 2bz = aa - bb$$

$$zz + bz = \frac{aa - bb}{2}$$

$$zz + bz + \tfrac{1}{4}bb = \frac{aa - bb}{2} + \tfrac{1}{4}bb$$

$$zz + bz + \tfrac{1}{4}bb = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}$$

$$z + \tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$$

$$z = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$$

In welcher ihr nur bb subtrahiren, und das übergebliebene $2zz + 2bz = aa - bb$ durch 2 dividiren dörffet, so giebet der quotient $zz + bz = \frac{aa - bb}{2}$ eine unreine quadratische Gleichung, welche ihr auf gewöhnliche Weise aufzulösen habet. Zu diesem Ende müsset ihr die helffte $\frac{1}{2}b$ des Coefficienten b des anderen Gliedes zum quadrate $\frac{1}{4}bb$ erheben, und auf beyden Seiten addiren; denn solchergestalt wird diese unreine Gleichung ein vollkommenes qua-

drate:

drate: $zz + bz + \frac{1}{4}bb = \frac{aa - bb}{2} + \frac{1}{4}bb$. demnach wird die Ausdruckung $-\frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}bb$ verbesseret, das ist, $\frac{1}{4}bb$ wird von $\frac{1}{2}bb$ abgezogen. Dieses geschiehet, wenn man beyde Brüche zu einerley Benennung $\frac{4}{8}$ und $\frac{2}{8}$ bringet, und 2 von 4 abziehet; da bleiben $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}bb$, und die verbesserte Gleichung $zz + bz + \frac{1}{4}bb = \frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}$ übrig. Wenn ihr jezt die quadrat-Wurzel aus- und $\frac{1}{2}b$ von $z + \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$ abziehet, so wird durch das übergebliebene $z = -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{aa}{2} - \frac{bb}{4}}$ der Aufgabe genug gethan.

Setzet in die Stelle der Buchstaben die gehörigen Zifferen:

$$z = -11\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{1369}{2} - \frac{529}{4}}$$

$$z = -11\tfrac{1}{2} + \sqrt{684\tfrac{1}{2} - 132\tfrac{1}{4}}$$

$$z = -11\tfrac{1}{2} + \sqrt{552\tfrac{1}{4}}$$

$$z = -11\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{2209}{4}}$$

$$z = -11\tfrac{1}{2} + 23\tfrac{1}{2} = 12$$

$$z + b = 12 + 23 = 35.$$

Denn wenn ihr 1369 durch 2, und 529 durch 4 dividiret, dem quotienten $132\frac{1}{4}$ von dem quotiente $684\frac{1}{2}$ abziehet, den Reste aber

$552\frac{1}{4}$ durch 4 multiplicirет, und den Zehler 1 zu dem Producte setzet, so kommet $\frac{2209}{4}$ heraus; demnach dörffet ihr nur aus $\frac{2209}{4}$ die Quadrat-Wurzel aus- und nach geschehener Division mit 2 von dem quotiente $23\frac{1}{2}$ die $11\frac{1}{2}$ abziehen, so bleiben 12 übrig, welche zu 23 gesetzet die Zahl der Kugeln auf der andern Pyramide $z + b = 35$ geben.

Probe.

Es sind auch würklich 144 von 12, und 1225 von 35 die Quadrate, und deren Sume = 1369 dem quadrate von 37 gleich.

Die I. Anmerkung.

113.) Wenn das Quadrat der unbekannten gleich Anfangs einen Coefficienten gehabt hätte, wäre die ganze Gleichung erst durch denselben zu dividiren gewesen, damit von dem Quadrate der unbekannten alles, was dasselbe behafften kunte, abgeschaffet würde: und wenn dieser Coefficient ein Bruch gewesen wäre, hätte man die ganze Gleichung durch den Nenner multipliciren, und das Producte durch den Zehler dividiren müssen.

Die II. Anmerkung.

114.) Diese Aufgabe kan auch also vorgetragen werden: aus der gegebenen Hypotenusa, und dem Unterscheide des Catheti gegen die dritte Seite, die dritte Seite, und den Cathetum zu finden.

§. XVI.

Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr Product, ihre Summe, und die Differenz ihrer Quadrate einander gleich sind.

Auflösung.

115.) Es sey die grosse Zahl $= x$, und die kleine $= y$. da ist nach den Bedingnissen der Aufgabe $x^2 - y^2 = x\,y$ und

$$xy = x + y$$
$$xy - y = y$$
$$y = \frac{x}{x-1}$$

Demnach dörffet ihr nur den Werthe y in der ersten Gleichung an seine Stelle setzen, so bekommet ihr, weil $y^2 = \frac{x^2}{xx - 2x + 1}$, und $xy = \frac{x^2}{x-1}$ ist, diese Gleichung: $x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x-1}$. da nun das andere Glied mit einem Bruche behafftet, müsset ihr erst durch den Nenner $2^2 - 2x + 1$ das erste Glied x^2 multipliciren, und zu dem Producte $x^4 - 2x^3 + x^2$ den Zehler nebst seinem Minder-Zeichen $- x^2$ addiren; so ist die erste Seite der Gleichung $x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2$. auf der andere Seite wird der Zehler x^2 durch den Nenner $x - 1$ multipliciret, und das Product giebet $x^3 - x^2$. deswegen verwandelet sich die vorige Gleichung in diese:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$
$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$
$$x^4 - 3x^3 = - x^2$$
$$x^2 - 3x^1 = - x = - 1$$
$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1$$
$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - \tfrac{4}{4}$$
$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{5}{4}$$
$$x - \tfrac{3}{2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$
$$x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Im

In welcher nach verbesserter Ausdruckung, weil x^2 sich gegen $-x^2$ aufhebet, noch $x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$ übrig bleibet. Demnach wird x^3 subtrahiret, und das übergebliebene $x^4 - 3x^3 = -x^2$ durch x^2 dividiret; da giebet der quotient $x^2 - 3x = -1$. eine unreine quadratische Gleichung. Deswegen nehmet die helffte $1\frac{1}{2}$ des Coefficienten 3 des anderen Gliedes, und erhebet $1\frac{1}{2}$ zum quadrate: dieses geschiehet, wenn ihr erst das ganze 1 durch den Nenner 2 multipliciret, zum Producte 2 den Zehler 1 addiret, und unter die Summe 3 den Neuner 2 Bruchweis wieder ansetzet; hernach aber $\frac{3}{2}$ zum quadrate erhebet, und $\frac{9}{4}$ beyderseiths der Gleichung addiret; denn solchergestalt lässet sich die gegebene Gleichung völlig einrichten, und auflösen. Sie stehet, wie dahier: $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1$. verbesseret die Ausdruckung, das ist, subtrahiret 1 von $\frac{9}{4}$. dieses zu verrichten müsset ihr 1 in ein Bruch, wessen Nenner 4 ist, verwandeln, so ist $\frac{4}{4} = 1$. Demnach wird $\frac{4}{4}$ von $\frac{9}{4}$ abgezogen, da bleiben $\frac{5}{4}$ übrig, daher kommet die Gleichung $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}$. endlich wird die quadrat-Wurzel ausgezogen. Wenn ihr jezt die grösse unter dem Wurzel-Zeichen zu einer grösse vor dem Wurzel-Zeichen reduciret, so kommet $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ zum Vorscheine; denn bey solchergestalt reducirten Irrational-grössen kan der Theil, welcher Irrational bleibet, für den Nahmen der Einheit mit recht gehalten werden. Nach geschehener Addition wird $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. ferner weil $xy - x = y$, so ist $x = \frac{y}{y-1}$. deswegen, wenn der Werth $\frac{y}{y-1}$ in der ersten Gleichung an die Stelle x gesetzet wird, komet $\frac{y^2}{y^2-2y+1} - \frac{y^2}{y-1} = y^2$ zum Vorscheine, nach geschehener Reduction aber wie vorhin $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ oder $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Weil $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ grösser als $\frac{1}{2}$ ist; so findet blos die erste Wurzel statt. Derowegen weil diese allein mit $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, nicht aber mit

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$; hingegen die falsche Wurzel $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ mit $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ die Probe hält; so sind die verlangten Zahlen $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Probe.

Denn $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$ und $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$. Ingleichen $\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 + \sqrt{5}$. Gleichergestalt ist $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 2 - \sqrt{5}$, und $(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 2 - \sqrt{5}$. Ingleichen $\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{5}{4} = 2 - \sqrt{5}$. W. Z. E.

Das

Das Fünffte Capitel.

Von Auflösung der Cubischen Gleichungen, und Aufgaben des dritten Grades.

§. I.

Die Einrichtung, Natur, und vornehmste Eigenschafften der Cubischen Gleichungen zu untersuchen.

116.) Die cubische Gleichungen werden eben so, wie die quadratische eingerichtet; ihr dörffet nemlich, wenn ihr die Wurzeln $x = a$, $x = b$, und $x = c$ habet, nur die Glieder versetzen, und $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$ durch einander multipliciren.

A

$$
\begin{array}{l}
x - a = 0 \\
x - b = 0 \\
\hline
xx - ax \\
\quad - bx + ab = 0 \\
\hline
xx - ax + ab = 0 \\
\quad - bx \\
x - c = 0 \\
\hline
x^3 - axx + abx - abc = 0 \\
\quad - bxx + acx \\
\quad - cxx + bcx
\end{array}
$$

So giebet das Product ein cubische Gleichung; welche $x - a = 0$, $x - b = 0$, und $x - c = 0$ zu ihren Wurzeln hat. Wenn ihr noch mehr Werthe von x annehmet, einfache Gleichungen daraus formiret, und dieselbe auf ein o. bringet, hernach aber in einander multipliciret, so könnet ihr aus dem Producte welches herauskomet, die Eigenschafften dieser Gleichungen ganz genau wahrnehmen, wie aus den folgenden Exempeln erhellet.

B

$$
\begin{array}{l}
x + a = 0 \\
x + b = 0 \\
\hline
xx + ax \\
\quad + bx + ab = 0 \\
x + c \\
\hline
x^3 + axx + abx + abc = 0 \\
\quad + bxx + acx \\
\quad + cxx + bcx
\end{array}
$$

C

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ \hline xx - ax \\ \quad - bx + ab \\ \\ x + c \\ \hline x^3 - axx + abx + abc \\ \quad - bxx - acx \\ \quad - cxx - bcx \end{array}$$

D

$$\begin{array}{l} x + a = 0 \\ x + b = 0 \\ \hline xx + ax \\ \quad + bx + ab \\ \\ x - c \\ \hline x^3 + axx + abx - abc \\ \quad + bxx - acx \\ \quad - cxx - bcx \end{array}$$

E

$$\begin{array}{l} x + 6 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ \hline xx + 6x - 12 \\ \quad - 2x \\ \\ x - 4 = 0 \\ \hline x^3 + 6x.x - 12x + 48 = 0 \\ \quad - 2xx - 24x \\ \quad - 4xx + \;\; 8x \\ \hline x^3 \quad * \quad - 28x + 48 = 0. \end{array}$$

F

$$x - 6 = 0$$
$$x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{l} xx - 6x - 12 \\ \quad + 2x \end{array}$$

$$x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 6xx - 12x - 48 = 0 \\ \quad + 2xx - 24x \\ \quad + 4xx + 8x \end{array}$$

$$x^3 \quad * \quad - 28x - 48 = 0.$$

117.) Wenn ihr diese Gleichungen mit Bedachtsamkeit betrachtet, werdet ihr mit dem Harriot, und Cartesio wahrnehmen, wie folget:

I.) Wenn die drey Wurzeln einer cubischen Gleichung falsche sind, führen alle Glieder das Mehr-Zeichen. wie bey B zu ersehen.

II.) Wenn nur ein wahre Wurzel, und zwey falsche vorhanden sind, im Falle wo die wahre Wurzel der Summe beyder falschen gleichet, hat das dritte Glied allezeit das Minder-Zeichen, wie bey F zu ersehen.

III.) Wenn die Gleichung zwey wahre, und nur ein falsche Wurzel hat, wird die Abwechselung der Mehr- und Minder-Zeichen einmahl unterbrochen, wie bey E

IV.) Wenn nur ein falsche Wurzel, und zwey wahre vorhanden sind, muß das lezte Glied allezeit das Mehr-Zeichen haben; wie bey E hingegen führet das andere Glied, wenn die Summe der wahren Wurzeln grösser als die falsche ist, das Minder-Zeichen: ist aber diese Summe kleiner, so muß das andere Glied mit dem Mehr-Zeichen bezeichnet werden.

V.)

V.) Wenn das Product der beyden wahren Wurzeln in einander kleiner als das Product derselben in die falsche ist, muß das dritte Glied das Minder- hingegen das Mehr-Zeichen führen, wenn dieses Product grösser als das andere ist.

VI.) Wenn die Summe der falschen Wurzeln grösser als die wahre ist, wird das andere Glied mit +, hingegen, wenn sie kleiner ist, mit − bezeichnet: wie aus den folgenden Exempeln erhellet.

$$
\begin{array}{l}
x + 4 = 0 \\
x + 5 = 0 \\
\hline
x^2 + 4x \\
\quad + 5x + 20 \\
\hline
x^2 + 9x + 20 \\
x - 2 = 0 \\
\hline
x^3 + 9x^2 + 20x \\
\quad - 2x^2 - 18x - 40 \\
\hline
x^3 + 7x^2 + 2x - 40 = 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
x + 2 = 0 \\
x + 3 = 0 \\
\hline
x^2 + 2x \\
\quad + 3x + 6 \\
\hline
x^2 + 5x + 6 \\
x - 6 = 0 \\
\hline
x^3 + 5x^2 + 6x \\
\quad - 5x^2 - 30 - 36 \\
\hline
x^3 - x^2 - 24x - 36 = 0
\end{array}
$$

VII.) Wenn das Product der wahren Wurzel durch die beyde falsche grösser ist, als das Product der falschen in einander, muß das dritte Glied das Minder- im wiedrigen Falle aber das Mehr-Zeichen haben.

118.) Ubrigens kan aus der unterbrochenen Abwechselung der Mehr- und Minder-Zeichen, wie viel falsche Wurzeln in einer cubischen Gleichung sind, wahrgenommen werden; massen, wenn die Summe der beyden falschen grösser als die wahre Wurzel ist, muß das andere Glied das Mehr- das dritte Minder- oder Mehr- und das vierte allezeit das Minder-Zeichen führen. Wie aus dem folgenden n. 119. zu ersehen.

119.) Wenn das erste, andere, und dritte Glied mit einander das Mehr-Zeichen führen, folget + dreymahl auf einander; folgends muß die Ordnung der Mehr- und Minder-Zeichen einmahl unterbrochen werden. Wie aus beygehendem Exempel erhellet.

$$
\begin{array}{l}
x + 2 = 0 \\
x + 4 = 0 \\
\hline
x^2 + 2x \\
\quad + 4x + 8 \\
\hline
x^2 + 6x + 8 \\
x - 1 = 0 \\
\hline
x^3 + 6x^2 + 8x \\
\quad - x^2 - 6x - 8 \\
\hline
x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0
\end{array}
$$

120.) Wenn das dritte Glied mit dem Minder- das erste und andere aber mit dem Mehr- und das vierte wieder mit dem Minder-Zeichen bemerket sind, wird die abwechselnde Ordnung der Zeichen zweymahl unterbrochen.

121.) Wenn die Summe der falschen kleiner als die wahre Wurzel ist, muß das andere und dritte Glied allezeit das Minder-Zeichen führen; weil das Product der beyden falschen durch die wahre grösser seyn wird, als das Product der beyden falschen in einander; deswegen wird die Gleichung dreymahl nach einander das Minder-Zeichen führen; dadurch aber wird die abwechselnde Ordnung der Zeichen zweymahl unterbrochen.

122.) Im Falle, wo die Gleichung zwey wahre, und nur ein falsche Wurzel hat, kan man durch eben dergleichen Vernunffts-Schlüsse einführen, daß die abwechselnde Ordnung der Zeichen nur einmahl unterbrochen werde. Ihr könnet euch auch selbst durch Exempel, in welchen man in die Stelle der Buchstaben Ziffer setzet, der Wahrheit dessen mit geringer Mühe überführen.

123.) Endlich, wenn die Summe der beyden wahren der falschen Wurzel gleichet, muß in der Gleichung das andere Glied fehlen, das dritte mit $-$, und das vierte mit $+$ bezeichnet werden. Wie bey E

124.) Wenn aber die Summe der beyden falschen der wahren Wurzel gleichet, so fehlet das andere Glied, und das dritte und vierte führen das Minder-Zeichen.

$$x - 6 = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$\overline{xx - 6x \quad\quad\quad\quad}$$
$$+ 2x - 12 = 0$$
$$x + 4 = 0$$
$$\overline{x^3 - 6xx - 12x - 48 = 0}$$
$$+ 2xx - 24x$$
$$+ 4xx + 8x$$
$$\overline{x^3 \quad * \quad - 28x - 48 = 0.}$$

$$x + 6 = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$\overline{xx + 6x \quad\quad\quad\quad}$$
$$- 2x - 12 = 0$$
$$x - 4 = 0$$
$$\overline{x^3 + 6xx - 12x + 48 = 0}$$
$$- 2xx - 24x$$
$$- 4xx + 8x$$
$$\overline{x^3 \quad * \quad - 28x + 48 = 0.}$$

125.) Im Falle, wo alle drey Wurzeln wahre, oder alle drey falsche sind, enthält das andere Glied ihre Sum̃en, das dritte ihre von zwey zu zwey abwechselnde Producte, und das lezte das Producte aller dreyen in einander. Wenn einige Wurzeln wahre, und die andere falsche sind (im Falle, wo die Summe der wahren von der falschen unterschieden ist) enthält das andere Glied den Unterscheid der wahren, und falschen Wurzeln, das dritte aber den Unterscheid der abwechselnden Producten, und das lezte allezeit das Product aller dreyen durch einander.

126.) Jezt wollen wir auch dahier, wie bey den quadratischen Gleichungen geschehen, Formulen für alle Fälle des dritten Grades beybringen; deswegen soll n dem Coefficienten des anderen Gliedes, p dem dritten, und q dem viertem Gliede gleich seyn; solchergestalt kommen diese 5. folgende Formulen zum Vorscheine:

I.

$$x^3 - nxx + px - q = 0$$

II.

$$x^3 + nxx + px + q = 0$$

III.

$$x^3 - nxx - px + q = 0$$

IV.

$$x^3 + nxx + px - q = 0$$

V.

$$x^3 \quad * \quad - px \underline{+} p = 0$$

Die Erste will, daß alle drey Wurzeln wahre, und
Die andere, daß alle drey falsche sind, andeuten.
Die dritte zeiget, daß zwey wahre, und nur ein falsche Wurzel vorhanden sey

Die

Die vierte giebet zu erkennen, daß zwey falsche, und nur ein wahre Wurzel da sey.

Die Fünffte stellet vor, daß die Summe der beyden falschen der wahren Wurzel gleiche; welches durch das Mehr-Zeichen in dem lezten Gliede angezeigt wird; oder, daß die Summe der falschen gleich sey der wahren Wurzel; welches durch das unterliegende Minder-Zeichen vorgestellet worden.

§. II.

Von den imaginarischen Wurzeln, und ihren Gleichungen.

127.) Wenn ein cubische Gleichung, die mit keinem Wurzel-Zeichen behafftet ist, einige einfache imaginarische Wurzeln in sich enthält, müssen zwey gleiche Wurzeln vorhanden seyn, dennoch mit der Beschaffenheit, daß eine das Mehr- und die andere das Minder-Zeichen führe. In diesem Falle, wenn die dritte Wurzel wahr ist, werden die Glieder Wechsel-Weis mit + und −, ist sie aber falsche, mit ± bezeichnet.

$$x - \sqrt{-b} = 0$$
$$x + \sqrt{-b} = 0$$

$$xx - x\sqrt{-b}$$
$$+ x\sqrt{-b} + b$$

$$x - c = 0$$

$$x^3 - xx\sqrt{-b}$$
$$+ xx\sqrt{-b} + bx$$
$$- cxx \qquad - cx\sqrt{-b}$$
$$+ cx\sqrt{-b} - bc$$

$$x^3 - cxx + bx - bc = 0.$$

Machet den Coefficienten des anderen Gliedes $= n$, das dritte $= p$, und das vierte $= q$. so könnet ihr euch für diese zwey Fälle nachstehende Formulen verfertigen :

I.

$$x^3 - nx + px - q = 0$$

II.

$$x^3 + nx + px + q = 0$$

Die erste ist gleich derjenigen, die wir oben für die drey wahre Wurzeln gefunden haben.

Die Andere gleichet der anderen, die auch oben stehet, und die drey falsche Wurzeln andeutet.

128.) Eine Gleichung des dritten Grades, so mit keinem Wurzel-Zeichen behafftet ist, und einige vermischte imaginarische Wurzeln haben, dennoch mit der Bedingnis, daß die Wurzel-Theile ungleiche, die Rationale aber gleiche Zeichen führen. In dem Falle, wo die dritte Wurzel wahr ist, hat das vierte Glied das Minder-Zeichen. Wenn die Summe der Rationalen, welche wir falsch zu seyn gesetzet haben, grösser ist, als die dritte Wurzel, so muß das andere und dritte Glied das Mehr- hingegen, wenn diese Summe geringer ist, das Minder-Zeichen führen. Sind aber diese beyde Summe einander gleiche, so fehlet in der Gleichung das andere Glied. Wenn die dritte Wurzel, gleichwie die beyde Rationale, falsch ist, haben alle Glieder das Mehr-Zeichen.

I.

$$x - \sqrt{-b} = o$$
$$x + \sqrt{-b} = o$$

$$xx - x\sqrt{-b}$$
$$+ x\sqrt{-b} + b$$

$$xx \quad * \quad + b$$
$$x + c = o$$

$$x^3 + cxx + bx + bc = o$$

II.

$$x + a - \sqrt{-b} = o$$

$$x + a + \sqrt{-b} = o$$

$$\begin{array}{l} xx + ax - x\sqrt{-b} \\ \quad + ax + x\sqrt{-b} + aa - a\sqrt{-b} \\ \qquad\qquad\qquad + a\sqrt{-b} + b \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} xx + 2ax & * & + aa & * & = o \\ & & + b & & \end{array}$$

$$x - c = o$$

$$\begin{array}{l} x^3 + 2axx + aax - aac = o \\ \quad - cxx + bx - bc \\ \qquad - 2acx \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{l} xx + 2ax + aa = o \\ \qquad\qquad + b \end{array}$$

$$x + c = o$$

$$\begin{array}{l} x^3 + 2axx + aax + aac = o \\ \quad + cxx + bx + bc \\ \qquad + 2acx \end{array}$$

IV.

IV.

$$x - a - \sqrt{-b} = o$$
$$x - a + \sqrt{-b} = o$$

$$\begin{array}{l} xx - ax - x\sqrt{-b} \\ \quad - ax + x\sqrt{-b} + aa + a\sqrt{-b} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - a\sqrt{-b} + b \end{array}$$

$$xx - 2ax \quad * \quad + aa \quad * \quad + b$$

$$x - c = o$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 2axx + aax + bx - aac \\ \quad - cxx + 2acx \quad - bc \end{array}$$

V.

$$\begin{array}{l} xx - 2ax + aa = o \\ \qquad\qquad\quad + b \end{array}$$

$$x + c = o$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 2axx + aax + aac = o \\ \quad + cxx + bx \quad + bc \\ \qquad\quad - 2acx \end{array}$$

129.) Wenn die beyde Rational-Theile der Gleichung, und die dritte Wurzel wahre sind, müssen die Glieder der Gleichung wechsel-weis das Mehr- und Minder-Zeichen führen.

130.) Hingegen wenn die beyde Rational-Theile wahre sind, die dritte Wurzel aber falsch ist, wird das dritte und vierte Glied mit $+$, das andere mit $-$ bezeichnet; dennoch nur in dem Falle, wo die Summe der Nationalen grösser als die dritte Wurzel ist; denn im wiedrigen Falle führet dasselbe das Mehr-Zeichen. Sind aber die beyden Wurzeln gleiche, so heben sich dieselbe gegen einander auf.

131.) Machet in allen diesen Fällen den Coefficienten des anderen Gliedes $= n$, das dritte $= p$, und das vierte $= q$. Da bekommet ihr diese vier Formulen:

I.

$$x^3 \pm nxx + px - q = 0$$

II.

$$x^3 + nxx + px + q = 0$$

III.

$$x^3 - nxx + px - q = 0$$

IV.

$$x^3 \pm nxx + px + q = 0.$$

Und für den Falle, wo die Summe der Nationalen der dritten Wurzel gleichet, haben wir diese zwey:

$$x^3 * + px - q = 0$$
$$x^3 * + px + q = 0$$

Endlich

Endlich ist bey den cubischen Gleichungen, in welchen imaginarische Wurzeln sind, annoch zu erinneren, daß das dritte Glied allezeit das Mehr-Zeichen habe.

§. III,

Aus einer gegebenen Gleichung das andere Glied wegzuschaffen.

132.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 + nxx + px - q = 0$. Darinne das andere Glied mit $+$ bezeichnet ist; dasselbe wegzubringen muß die gegebene Gleichung in ein andere, die das Minder-Zeichen führet, verwandelet werden. Dieses geschiehet, wenn ihr $x = y - z$ setzet, und den Werthe von x, welcher $y - z$ ist, in die Gleichung, und Stelle von x übertraget; denn solchergestalt bekomet ihr nachstehende andere Gleichung, welche der gegebenen gänzlich gleichet:

$$\begin{array}{lllll} x^3 & = y^3 & - 3zyy & + 3zzy & - z^3 \\ + nxx & = & + nyy & - 2nzy & + nzz \\ + px & = & & + py & - pz \\ - q & = & & & - q = 0 \end{array}$$

Damit ihr aber jezt das andere Glied abschaffen möget, dörffet ihr euch nur vorbilden, dasselbe sey $-3zyy + nyy = 0$ und auf beyden Seiten der Gleichung $3zyy$ addiren, auf das $nyy = 3zyy$ werde; wenn dieses geschehen, wird $nyy = 3zyy$ durch yy, und der Quotient $n = 3z$ durch 3 dividiret; da giebet der andere Quotient $\frac{n}{3} = z$ zu erkennen, daß die grösse z, die man von der unbekannten, um das andere Glied abzuschaffen, subtrahiret hat, dem Coefficienten des anderen Gliedes, wenn dasselbe durch 3 dividiret worden, gleich seyn müsse. Dieser Coefficient ist der Exponente des gegebenen Grades der Gleichung.

133.) Demnach bestehet die allgemeine Regel, das andere Glied in einer Gleichung wegzuschaffen, hauptsächlich darinne, daß man den Coefficienten des anderen Gliedes, nachdem derselbe durch den Exponenten des Grades der Gleichung dividiret worden, von y abziehe, wenn das andere Glied $+$, und zu y addire, wenn dasselbe $-$ führet; so fort erst, wenn dieses geschehen, die gehörige Verwandelung vornehme. Ihr dörffet nemlich alsdenn nur $y - \frac{n}{3}$ in die Stelle von x setzen, da giebet die Verwandelung diese Gleichung:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 = & y^3 - nyy + \frac{3nny}{9} - \frac{n^3}{27} \\
+ nx^2 = & + nyy - \frac{2nny}{3} + \frac{n^3}{9} \\
+ px = & + py - \frac{pn}{3} \\
- q = & - q = 0. \\
\hline
& y^3 \; * \; - \frac{3nny}{9} + \frac{2n^3}{27} \\
& \quad py - \frac{pn}{3} \\
& \quad - q = 0.
\end{array}
$$

§. IV.

§. IV.

Aus einer gegebenen Gleichung die Brüche wegzuschaffen, wenn das erste Glied keinen Coefficienten hat.

134.) Es sey $x^3 - \frac{n}{a}xx + \frac{p}{b}x - \frac{q}{c} = o$ die gegebene Gleichung: Multiplicieret alle Wurzeln durch das Producte abc deren drey Nenneren; ich will sagen, machet $abcx = y$; da wird $x = \frac{y}{abc}$. setzet $\frac{y}{abc}$ in die Gleichung, und Stelle von x, so kommet durch die Verwandelung diese zum Vorscheine:

$$x^3 = \frac{y^3}{a^3b^3c^3}$$

$$-\frac{nx^2}{a} = -nyy$$

$$+\frac{px}{b} = +\frac{py}{ab^2c}$$

$$-\frac{q}{c} = -\frac{q}{c} = o.$$

Wenn ihr jezt alle Glieder durch den Nenner des ersten Gliedes multiplicieret, so kommet im Producte ein andere Gleichung, darinne die Brüche abgeschaffet worden:

$$y^3 - bcnyy + aabccpy - a^3 b^3 ccq = o.$$

135.) Wenn die Brüche Zahlen sind, so dörffet ihr kürze halben $3 = a$, $9 = aa$, und $27 = a^3$ machen; denn solchergestalt giebet das Producte der drey Nenneren a^6, und wird $a^6 y = z$, oder $y = \frac{z}{a^6}$. deswegen dörffet ihr nur $\frac{z}{a^6}$ in die Gleichung, und Stelle von y setzen, da kommet ein neue Gleichung heraus, darinne die Glieder durch den Nenner a^{18} des ersten Gliedes multipliciret in dem Producte ein andere Gleichung ohne Brüche ausmachen.

$$y^3 * - \frac{3nny}{9} + \frac{2n^3}{27}$$

$$y^3 = \frac{z^3}{a^{18}} \quad + \quad py - \frac{pn}{3}$$

$$- \frac{3nny}{aa} = - \frac{3nnz}{a^8} \quad - q = o$$

$$+ py = + \frac{pz}{a^6}$$

$$+ \frac{2n^3}{a^3} = + \frac{2n^3}{a^3}$$

$$- \frac{pn}{a} = - \frac{pn}{a}$$

$$- q = - q = o$$

$$z^3 * - 3a^{10} nnz + 2a^{15} n^3$$
$$+ a^{12} pz - a^{17} po$$
$$- q = o.$$

§. V.

Eine Gleichung, darinne das erste Glied einen Coefficienten hat, in ein andere, worinne dasselbe keinen Coefficienten hat, zu verwandeln.

136.) Es sey $ax^3 - nxx + px - q = 0$ setzet $ax = y$, oder $x = \frac{y}{a}$, und $\frac{y}{a}$ in die Stelle von x, da giebet die Verwandelung,

$$ax^3 = a\frac{y^3}{a^3}$$

$$-nx^2 = -\frac{nyy}{aa}$$

$$+px = +\frac{py}{a}$$

$$-q = -q = 0$$

Eine Gleichung, darinne alle Glieder durch a^3 dem Nenner des ersten Gliedes multipliciret, und durch a dividiret, die gesuchte Gleichung geben, deren erstes Glied keinen Coefficienten hat.

§. VI.

Eine Gleichung, darinne einige Glieder fehlen, in ein andere, die alle Glieder hat, zu verwandeln.

137.) Es sey $x^3 + q = o$. die gegebene Gleichung. Setzet $x = y - a$ oder $x = y + a$, und die Werthe von x, welche $y - a$, oder $y + a$ sind, in die gegebene Gleichung, so kommet ein vollkommene Gleichung heraus:

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 \\ -q &= \qquad\qquad\qquad\qquad -q = o. \end{aligned}$$

§. VII.

Aus einer gegebenen Gleichung, darinne das erste Glied einen Coefficienten hat, das andere Glied wegzuschaffen.

138.) Es sey $ax^3 + nxx + px - q = o$. die gegebene Gleichung. Wenn das erste Glied keinen Coefficienten hätte, wäre $x = y - \frac{n}{3}$ wie oben gelehrt worden. folgends ist $x = \frac{y}{a} - \frac{y}{a}$. Wenn ihr jezt die Werthe von x in die gegebene Gleichung übertraget, und die Expreßion corrigiret, bekommet ihr diese nachstehende Gleichung, in welcher das andere Glied durch wiedrige Zeichen $-\frac{ny^2}{aa}$ und $+\frac{nyy}{aa}$ weg geschaffet worden.

$$a x^3 = \frac{y^3}{aa} - \frac{nyy}{aa} + \frac{nny}{3aa} - \frac{n^3}{27aa}$$

$$+ n x^2 = \quad + \frac{nyy}{aa} - \frac{2nnyy}{3aa} + \frac{nn}{9aa}$$

$$+ p x = \quad + \frac{py}{a} - \frac{pn}{3a}$$

$$- q = \quad - q = 0$$

$$y^3 \quad * \quad - \frac{nyy}{3} - \frac{n^3}{27}$$

$$+ apy + \frac{nn}{9}$$

$$- \frac{apn}{3}$$

$$- aaq = 0$$

Die Buchstaben-Brüche wegzubringen, werden alle Glieder durch den Nenner aa des ersten Gliedes multipliciret; denn solchergestalt könnet ihr das andere Glied, den Coefficienten des ersten Gliedes, und die Buchstaben-Brüche abschaffen; die Zahlen-Brüche werden auf die oben gelehrte Weise weggebracht.

§. VIII.

Aus einer gegebenen Gleichung die Irrational-Grössen abzuschaffen.

139.) Die Irrational-Grössen können aus einer Gleichung nicht leichter abgeschaffet werden, als wenn man die Gleichungen zu höheren Potenzen erhebet. Weil wir aber von den höheren Gleichungen dahier nicht handeln, sondern dieselbe bey den Kegel-Schnitten anbringen werden; so will ich nur zeigen, wie man die Irrational-Grössen auch auf ein andere und weit allgemeinere Weise, ohne daß die Gleichung zu höheren Potenzen erhoben werde, abschaffen könne.

Es sey $x^3 - xx\sqrt{n} + px - q\sqrt{n} = 0$ die gegebene Gleichung. Da könnet ihr, wenn ihr die Eigenschafften derselben bedachtsam erweget, von euch selbst wahrnehmen, daß, obschon nur das andere und vierte Glied ein Wurzel-Zeichen führen, dennoch alle drey Wurzeln mit demselben behafftet seyn müssen; massen, wenn nur ein Wurzel-Zeichen vorhanden wäre, die Irrational-Grösse auch in dem dritten Gliede seyn müste; anerwogen dasselbe die abwechselnde Producte deren Wurzeln in sich enthält. Im Falle, wo nur zwey Irrational-Grössen vorhanden sind, kan in dem lezten Gliede, weil dasselbe aus dem Producte der drey Wurzeln in einander bestehet, sich kein Irrational-Grösse einfinden. Um euch dieser Wahrheit annoch besser zu überführen, wollen wir setzen, es seyen diese drey Wurzeln: $x - a\sqrt{c}$, $x - b\sqrt{c}$, und $x - d\sqrt{c}$ und alle drey durch einander multiplicieren; da wird aus dem Producte, welches herauskommet, bald klar, daß die Gleichung nur das Wurzel-

$$x - a\sqrt{c} = o$$
$$x - b\sqrt{c} = o$$

$$xx - ax\sqrt{c} + abc$$
$$- bx\sqrt{c}$$
$$x - d\sqrt{c} = o$$

$$x^3 - axx\sqrt{c} + abcx - abcd$$
$$- bxx\sqrt{c} + adcx$$
$$- dxx\sqrt{c} + bdcx - abcd\sqrt{q}$$

Zeichen in dem anderen und vierten Gliede haben könne; dannenhero, wenn ihr alle Wurzeln der Gleichung durch $\sqrt{n}$ multipliciret, und $x\sqrt{n} = y$ oder $y = \frac{y}{\sqrt{n}}$ machet, hernach aber $\frac{y}{\sqrt{n}}$ in die Stelle von x setzet, bekomet ihr eine Gleichung, welche, nachdem ihre Glieder durch den Nenner $n\sqrt{n}$ des ersten Gliedes sind multipliciret worden, eine neue Gleichung, so begehret worden, vorstellet: $y^3 - nyy + pny - nnq = o$. Daraus die Irrational-Grössen abgeschaffet worden, ohne daß man dieselbe von dem dritten Grade, darinne sie stunde, zu einem höheren erhoben hatte.

$$x^3 = \frac{y^3}{n\sqrt{n}}$$

$$- xx\sqrt{n} = - \frac{yy\sqrt{n}}{n}$$

$$+ px = + \frac{py}{\sqrt{n}}$$

$$- q\sqrt{n} = - q\sqrt{n} = o.$$

140.) Auf diese Weise können aus allen Gleichungen des anderen und dritten Grades die Irrational-Grössen abgeschaffet werden; wenn nur ihre Wurzeln aus einerley Wurzel-Grössen bestehen. Dieses aber könnet ihr bey den quadratischen Gleichungen wahrnehmen, wenn nur derselben anderes, und bey den Cubischen, wenn ihr anderes und viertes Glied mit einem Wurzel-Zeichen behafftet sind.

§. IX.

Von Auflösung der cubischen Gleichungen.

141.) Die cubische Gleichungen können nicht aufgelöset werden, wenn nicht erst aus denselben das andere Glied abgeschaffet worden; da nun dieses nicht geschehen mag, ohne daß entweder die Summe der beyden wahren Wurzeln gleich werde der falschen Wurzel, oder ohne daß die Sum̃e der falschen Wurzel der wahren gleich werde, so lassen sich alle Gleichungen des dritten Grades, in welchen das andere Glied fehlet, in diese vier Formulen verfassen:

I.

$$x^3 * - px + q = 0$$

II.

$$x^3 * - px - q = 0$$

III.

$$x^3 * + px + q = 0$$

IV.

$$x^3 * + px - q = 0$$

Die

Die erste Formul will andeuten, daß in der Gleichung zwey wahre Wurzeln sind, deren Sume gleich ist der falschen Wurzel.

Die andere zeiget, daß die Sume der beyden falschen Wurzeln gleich sey der wahren Warzel.

Die dritte, daß zwey Irrationale, und ein falsche Wurzel vorhanden sey.

Die vierte, daß zwey Irrationale, und ein wahre Wurzel da sey.

§. X.

Von Auflösung der cubischen Gleichungen in dem ersten Falle.

142.) Es sey $x^3 * - p x + q = o$. die gegebene Gleichung: die Ordnung der Zeichen überführet uns, daß zwey wahre, und ein falsche Wurzel vorhanden sind, im Falle, wo keine Irrational-Grössen verborgen liegen. Wir wollen setzen, die Sume der beyden wahren sey $= 2 f$, ihr Unterscheid $= 2 g$, da ist die erste $f + g$, und die andere $f - g$, und, weil die falsche gleich ist diesen beyden, muß dieselbe $- 2 f$ seyn. machet $z = x$, so ist die erste wahre $= z - f - g = o$. die andere aber $z - f + g = o$. und die falsche $z + 2 f = o$. welche durch einander multiplicieret, im Producte eine neue Gleichung zum Vorscheine bringen: $z^3 * - 3 ffz + 2 f3 = o$ die der gegebenen
$$- ggz - 2 ggf$$
vollkommen gleichet.

$$z - f - g = o$$
$$z - f + g = o$$

$$\begin{array}{l} z^2 - fz - gz \\ \quad - fz + gz + ff + fg \\ \qquad\qquad\qquad - fg - gg \end{array}$$

$$zz - 2fz + ff - gg = o$$
$$z + 2f = o$$

$$\begin{array}{l} z^3 - 2fzz + ffz + zf3 \\ \quad + 2fzz - ggz + 2ggf \\ \qquad\qquad - 4ffz \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z^3 * - 3ffz + 2f^3 = o \\ \quad - \quad ggz - 2ggf \end{array}$$

143.) Nach beschehener Vergleichung der Gliederen wird $p = 3ff + gg$, welche durch 3 dividiret dem Quotiente $\frac{p}{3} = ff + \frac{gg}{3}$ geben. Wenn hingegen die beyden dritten Glieder mit einander vergleichen werden, kommet $q = 2f3 - 2ggf$ heraus; nach verrichteter Division durch 2 wird $\frac{q}{2} = f3 - ggf$. Damit die unbekannte f in diesen beyden Gleichungen einerley Grades sey, muß die erste $\frac{p}{3} = ff + \frac{gg}{3}$ zur dritten, und die andere $\frac{q}{2} = f^3 - ggf$ zur anderen Dignität erhoben, hernach aber die Ausdruckung verbesseret werden, da kommet: $f^6 + ggf^4 + \frac{g^4 ff}{3}$

$+ \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27}$ und $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$ heraus. Jezt dörffet ihr nur von der ersten die andere abziehen, so bleibet $3ggf^4 - \frac{2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$ übrig.

144.) Wenn ihr diese lezte Gleichung betrachtet, werdet ihr wahrnehmen, daß ein jedes Glied wahr sey; weil f grösser als g ist; denn f ist die helffte der Sum̃e der beyden wahren Wurzeln, und g ist nur die helffte ihres Unterscheides. Werden die Glieder $3ggf^4$ und $\frac{2g^4ff}{3}$ durch $ggff$ dividiret, so ist der Quotient $3ff$ grösser, als der Quotient $-\frac{2gg}{3}$. und weil nur $-\frac{2g^4ff}{3}$ in dem ersten Gliede falsch ist, muß das gantze Glied wahr seyn; folgends auch das andere, weil es dem ersten gleichet. Dannenhero, wenn die Summe der beyden wahren, und unter einander ungleichen Wurzeln der falschen gleich ist, wird $\frac{p^3}{27}$ grösser als $\frac{qq}{4}$. Ich will sagen, der Cubus aus dem dritten Theile des Coefficienten in dem dritten Gliede der gegebenen Gleichung sey grösser als das Quadrate der helffte des lezten Gliedes.

145.) Jezt wollen wir setzen, die beyde wahre Wurzeln seyen gleiche: da wird der Unterscheid g eine Nulle, folgends auch alle andere Glieder, darinne das g befindlich, und deßwegen verwandelt sich die Gleichung in diese: $z^3 * - 3ffzz + 2f^3 = 0$. wie aus der Multiplication der drey Wurzeln $z - f$, $z - f$ und $z + f$ in einander ganz deutlich erwiesen wird. Demnach möget ihr die Glieder gegen einander vergleichen, so wird $p = 3ff$ oder

$\frac{p}{3} = ff$, und $q = 2f^3$ oder $\frac{q}{2} = f^3$. Damit nun die unbekañte f einerley Grades werde, muß man die erste zur dritten, und die zweyte zur anderen Dignität erheben: wenn dieses geschehen, da wird $\frac{p^3}{27} = f^6$, und $\frac{qq}{4} = f^6$ folgends $\frac{p^3}{27} = \frac{qq}{4}$. das ist, wenn die beyden wahren Wurzeln gleiche sind, wird der Cubus des dritten Theiles von dem Coefficiente in dem dritten Gliede gleich dem Quadrate der helffte des lezten Gliedes. Hieraus fliesset, daß im Falle, wo $\frac{p^3}{27}$ kleiner als $\frac{qq}{4}$ ist, nothwendig zwey Irrational-Wurzeln vorhanden seyn müssen.

146.) Setzen wir ferners, es seyen die beyde wahre Wurzeln gleiche; da kan die durch Vergleichung des anderen Gliedes der herausgekomenen gefundene Gleichung $3ff + gg = p$ reduciret werden; weil der Unterscheid g eine Nulle ist; daher ist auch $ff = \frac{p}{3}$ Ingleichen wird auch die Gleichung: $q = 2f^3 - 2ggf$, so wir durch Vergleichung des dritten Gliedes der gegebenen mit dem dritten Gliede der herausgekomenen gefunden haben, zu dieser: $2f^3 = q$ oder $f^3 = q : 2$ reduciret. Wenn ihr alsdenn nach geschehener Reduction die eine Gleichung durch die andere $ff = \frac{p}{3}$, das ist, das erste Glied der einen, durch das erste Glied der anderen, und das andere Glied der einen durch das andere Glied der anderen dividiret, so komet in dem Quotiente $f = \frac{3q}{2p}$ heraus. Da nun f eine deren wahren Wurzeln ist, die falsche aber den beyden wahren gleichet,

gleichet, so folget, daß die falsche $-2f = -\frac{6q}{2p}$ oder $-2f = -\frac{3q}{p}$, die beyde wahre hingegen $f = \frac{3q}{2p}$ und $f = \frac{3q}{2p}$ seyn müssen.

147.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 * - 12x + 16 = 0$. da dörffet ihr nur, ob $\frac{p^3}{27} = \frac{qq}{4}$ sey, zu erst erforschen, so werdet ihr mit geringer Mühe diese Gleichung auflösen. Damit ihr aber dieses erfahren möget, müsset ihr vor allem $\frac{1}{3}$ des dritten Gliedes $12 = 4$ zur dritten Dignität $= 64$ erheben, so wird $64 = \frac{p^3}{27}$. Hernach aber die Helffte 8 des vierten Gliedes 16 zum Quadrate $= 64$ erheben, und $64 = \frac{qq}{4}$ machen, wenn dieses geschehen, so erhellet also bald von sich selbst, daß $\frac{p^3}{27} = \frac{qq}{4}$, das ist, daß $64 = 64$ sey, folgends die beyden wahren Wurzeln einander gleichen. Damit ihr aber dieselbe finden möget, dörffet ihr nur das lezte Glied 16 dreymahl $= 48$ nehmen, und 48 durch das dritte Glied 12. zweymahl genommen $= 24$ dividiren, so giebet der Quotient $2 = f$ die beyden wahren Wurzeln. Da nun die falsche den beyden wahren gleichet, so muß $-4 = -2f$ seyn. Wollet ihr euere Arbeit gerechtfertigen, so multipliciret diese drey Wurzeln: $x - 2 = 0$, $x - 2 = 0$, und $x + 4 = 0$ durch einander; da muß das Product, welches herauskommet, der gegebenen gantz gleich seyn.

148.) Wenn wir aber setzen, es seyen alle drey Wurzeln einander gleich, so muß man die Gleichung $p = 3ff + gg$, und $q = 2f^3 - 2ggf$, so wir durch Vergleichung der Glieder in der gegebenen mit den Gliederen in der herausgekommenen gefunden ha-

ben, zu handen nehmen, hernach die falsche Wurzel $2f$ zum Quadrate $4ff$ erheben, und endlich das andere Glied $3ff + gg$ in der ersten Gleichung davon subtrahiren; denn solchergestalt wird das übergebliebene $ff - gg$ das andere Glied $2f^3 - 2ggf$ in der anderen Gleichung gantz genau dividiren, und zum Quotienten $2f$ geben, welche die Wurzel des Quadrates $4ff$ sind.

149.) Hieraus fliesset, daß im Falle, wo die falsche Wurzel Rational ist, man allezeit ein grösseres Quadrat als p. finden werde: ich will sagen, der Coefficient des dritten Gliedes der gegebenen Gleichung werde nach abgezogenem p. den Rest q, das ist, das dritte Glied der gegebenen, ganz genau dividiren, und der Quotient werde die Wurzel des Quadrates seyn. Wenn ihr demnach diese Wurzel mit dem Minder-Zeichen bemerket, so bekommet ihr die falsche Wurzel. Ingleichen, wenn man die erste wahre Wurzel $f + g$ zum Quadrate erhebet: $ff + 2fg + gg$, und davon den Werth des p., das ist, $3ff + gg$ subtrahiret, so muß das übergebliebene $2ff - 2gf$ den Werth von q, das ist, $2f^3 - 2ggf$ ganz genau dividiren, und dem Quotienten $f + g$ die Wurzel des Quadrates geben. Eben also könnet ihr wahrnehmen, daß, wenn man das aus der anderen wahren Wurzel $f - g$ gemachte Quadrat $ff - 2fg + gg$ von dem Werthe p. abziehet, das übergebliebene den Werth von q ganz richtig und ohne Reste dividire, und dem Quotienten die Wurzel $f - g$ wiedergebe.

150.) Hieraus fliesset dieser allgemeine Lehrsatz, daß, wenn die beyden wahre Wurzeln Rationale sind, man allezeit ein geringeres Quadrat, als der Coefficient p. des dritten Gliedes ist, finden werde, welches von p. abgezogen, mit seinem Reste das vierte Glied q ganz genau zu dividiren, und dem Quotienten die wahre Wurzel des Quadrates zu geben vermöge.

151.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 * - 19x + 30 = 0$. darinne giebet die Ordnung der Zeichen zu erkennen, daß zwey

wahre

wahre Wurzeln mit einer falschen vergesellschafftet seyen, im Falle, wo keine Irrational-Grössen verborgen liegen, damit ihr nun diese Gleichung auflösen möget, dörffet ihr nur ein grösseres Quadrat, als 19 ist, Z. E. 25 ergreiffen, 19 von 25 abziehen, und mit dem Reste 6 des lezte Glied 30 der Gleichung dividiren, so giebet der Quotient 5 die Wurzel des quadrates 25, und daher deutlich zu erkennen, daß − 5 die falsche Wurzel der vorgelegten Gleichung sey.

$$x + 5 \text{ divisor.}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \; * - 19 + 30 & xx - 5x + 6 \\ x^3 + 4xx & \\ \hline * - 5xx - 19x + 30 & \\ \;\; - 5xx - 25x & \\ \hline \;\; * \;\; + 6x + 30 & \\ \;\;\;\;\;\; + 6x + 30 & \\ \hline \;\; * \;\; * & \end{array}$$

Die beyden anderen Wurzeln zu finden, dividiret die gegebene Gleichung durch $x + 5 = 0$, das ist, durch die gefundene Wurzel, so giebet der quotient $xx - 5x + 6$ eine Gleichung des anderen Grades, die annoch die zwey anderen Wurzeln enthält. Weil diese Gleichung quadratisch ist, so kan sie gar leicht durch die oben gelehrte Weise aufgelöset werden, die gefundene Wurzeln werden $x - 2 = 0$, und $x - 3 = 0$ seyn.

Wollet ihr aber die beyden Wurzeln auf eine andere Weise finden, so nehmet ein kleineres quadrate als der Coefficient 19 des dritten Gliedes ist, (wir wollen es durch das quadrate 16. versuchen) und ziehet 16 von 19 ab, so bleiben 3 übrig. Da nun 3, wenn wir das lezte Glied 30 dardurch dividiren, dem quotient 10, welches die Wurzel des angenommenen quadrates 16 nicht ist, giebet, so erhellet, daß dieses quadrate zu groß gewesen sey. Derowegen neh-

met ihr annoch ein geringeres quadrate, (wir wollen es durch 9 versuchen) und ziehet 9 von 19 ab, so bleiben 10 übrig. Dividiret das lezte Glied 30 durch 10, so giebet der quotient 3 die Wurzel des quadrates 9. folgends ist 3 eine der wahren Wurzeln. Weil die beyden wahren gleich sind der falschen 5, so muß die andere $= 2$ seyn. Demnach sind die gesuchten drey Wurzeln: $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, und $x + 5 = 0$.

Anmerrkung.

Wenn bey Untersuchung der falschen Wurzel man kein grösseres, und der wahren, kein kleineres quadrate, als der Coefficient des dritten Gliedes ist, welches die erforderliche Eigenschafften hat, finden kan, so hat man ein untrügliches Zeichen, daß die gesuchte Wurzeln Irrational sind.

§. XI.

Von Auflösung der cubischen Gleichungen in dem anderen Falle.

152.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 * - px - q = 0$. in welcher die Summe der falschen gleich ist der wahren Wurzel. Wir wollen die Summe der falschen $- 2f$, und ihren Unterscheid $- 2g$ nennen. In dieser Betrachtung ist die erste $- f - g$, die andere $- f + g$, und die wahre $= 2f$. Es sey ferners $z = x$. so komet $z + f + g = 0$ für die erste, und $z + f - g = 0$ für die andere falsche, hingegen $z - 2f = 0$ für die wahre Wurzel heraus. Machet das Producte der Wurzeln in einander, so ist dasselbe gleich der gegebenen Gleichung:

$$z + f + g = o$$
$$z + f - g = o$$

$$\begin{array}{l} zz + fz + gz \\ + fz \quad + ff + fg \\ - gz \quad - fg - gg \end{array}$$

$$\begin{array}{l} zz + 2fz * + ff * - gg \\ z - 2f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z^3 + 2fzz + ffz - 2f^3 \\ - 2fzz - ggz + 2ggf \\ - 4ffz \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z^3 \quad * \quad - 3ffz - 2f^3 = o \\ - ggz + 2ggf \end{array}$$

Vergleichet die beyden dritten Glieder, so bekommet ihr $-p = -3ff - gg$, oder $3ff + gg = p$. dividiret durch 3, so giebet der quotient $ff + \frac{gg}{3} = \frac{p}{3}$. vergleichet auch die beyden vierten Glieder, so kommet $-q = -2f^3 + 2ggf$, oder $2f^3 - 2ggf = q$ heraus. dividiret durch 2, so giebet der quotient $f^3 - ggf = \frac{q}{2}$. Erhebet die beyden Gleichungen, die erste zur dritten, und die andere zu der anderen Dignität, damit die unbekannte z in beyden Gleichungen einerley Grades sey, so kommet nach verbesserter Ausdruckung $f^6 + ggf^4 + \frac{g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27}$, und $f^6 - 2ggf^4 + g^4ff = \frac{qq}{4}$ heraus, gleichwie in dem vorhergehenden Falle geschehen. Dem-

auch ziehet die eine von der anderen ab, so bleibet $\frac{3ggf^4 - 2g^4ff}{3} + \frac{g^6}{27} = \frac{p^3}{27} - \frac{qq}{4}$ übrig.

153.) Wenn ihr dahier, wie in dem vorhergehenden Falle, euere Beobachtungen anstellet, so werdet ihr wahrnehmen, daß die beyde Glieder dieser Gleichung wahre seyn müssen. Folgends das $\frac{p^3}{27}$ grösser als $\frac{qq}{4}$ sey. Ich will sagen, es müsse, wenn die Sumẽ der beyden unter sich ungleichen Wurzeln der wahren gleich ist, der Cubus des drittheiles von dem Coefficienten des dritten Gliedes grösser als das quadrate der helffte des lezten Gliedes seyn.

Wolte man aber setzen, die beyden wahren seyen unter einander gleich; so wären alle Glieder der herausgekomenen Gleichung, in welchen sich g. befindet, weil der Unterscheid g eine Nulle ist, auch Nullen. Es wurde aber die in der Verwandelung herausgekomene Gleichung also beschaffen seyn: $z^3 - 3ffzz - 2f^3 = 0$. vergleichet die Glieder gegen einander, so bekommet ihr $p = 3ff$ oder $\frac{p}{3} = ff$, und $q = 2f^3$ oder $\frac{q}{2} = f^3$. erhebet die erste zur dritten, und die andere zu der anderen Dignität, so wird $\frac{p^3}{27} = f^6$ und $\frac{qq}{4} = f^6$. folgends $\frac{p^3}{27} = \frac{qq}{4}$. woraus ganz deutlich erhellet, daß, wenn die beyde falsche Wurzeln gleich sind, der Cubus $\frac{p^3}{27}$ dem quadrate $\frac{qq}{4}$ gleich werde. Wie in dem vorhergehenden Falle geschehen.

schehen. Hieraus folget noch ferner, daß, wenn $\frac{p^3}{27}$ kleiner als $\frac{qq}{4}$ ist die Gleichung nothwendig zwey Irrational-Wurzeln enthalten müssen.

154.) Jezt wollen wir setzen, es seyen die beyde falsche Wurzeln gleich, und die Gleichung $p = 3ff + gg$, die wir durch Vergleichung der beyden dritten Glieder in der herausgebrachten, und gegebenen Gleichung gefunden haben, zu handen nehmen. Da nun der Unterscheid g ein Nulle ist, so haben wir nur $p = 3ff$, und nach verricheter Division durch 3, $\frac{p}{3} = ff$. Gleicher gestalt wird die Gleichung $q = 2f^3 - 2ggf$, die wir in der Vergleichung der beyden vierten Glieder gegen einander gefunden haben, zu dieser $q = 2f^3$, und nach verrichteter Division durch 2, zu $\frac{q}{2} = f^3$ reduciret.

Dividiret die Gleichung $\frac{p}{3} = ff$ durch $\frac{q}{2} = f^3$, das ist, ein jedes Glied durch das andere, so giebet der quotient $f = \frac{3q}{2p}$. Wie in dem vorhergehenden Falle. Da nun f eine falsche Grösse, die andere aber ihren gleich ist, so wird die wahre $2f = \frac{3q}{p}$, und die beyden falsche $-f = -\frac{3q}{2p}$ und $-f = -\frac{3q}{2p}$ seyn. Welches von dem vorhergehenden Falle nur in dem Mehr- und Minder-Zeichen verschieden ist.

155.)

155.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 - 48x - 128 = 0$. Nehmet ein Drittheil von $84 = 16$, und erhebet 16 zur dritten Dignität $= 4096$. Gleicher gestalt nehmet ihr auch die helffte von $128 = 64$, und erhebet 64 zum quadrate $= 4096$. so wird $\frac{p^3}{27} = \frac{qq}{4}$. folgends sind die beyden falsche Wurzeln gleich. derowegen multipliciret das lezte Glied 128 durch 3, und dividiret das Product 384, welches herauskommet, durch 84 den Coefficienten des dritten Gliedes, so giebet der quotient 8 die wahre Wurzel $2f = \frac{3q}{p}$. dannenhero sind die beyden falsche: $x + 4 = 0$, und $x + 4 = 0$.

156.) Sind aber die beyden falsche Wurzeln ungleich, so müsset ihr die zwey Gleichungen: $p = 3ff + gg$, und $q = 2f^3 - 2ggf$, die wir in der Vergleichung der Glieder gegen einander gefunden haben, ergreiffen, das quadrate der wahren $2f = 4ff$ machen, und den Werth $p = 3ff + gg$ davon abziehen, so wird das übergebliebene $ff - gg$ den Werth $q = 2f - 2ggf$ ganz richtig dividiren, und dem quotient $2f$ die Wurzel von $4ff$ geben.

Ingleichen, wenn man das quadrate einer falschen Wurzel $-f - g = ff + 2gf + gg$ ergreiffet, und von dem Werthe p. abziehet, muß das übergebliebene $2ff - 2gf$ ganz genau den Werth q dividiren, und dem quotient $f + g$ die Wurzel des quadrates geben.

157.) Hieraus fliesset, daß, wenn die wahre Wurzel Rational ist, man allezeit ein grösseres quadrate, als der Coefficient des dritten Gliedes der gegebenen Gleichung ist, finden werde, wessen Rest nachdem man diesen Coefficienten abgezogen, das lezte Glied ganz richtig dividire, und dem quotient die Wurzel des quadrates geben.

geben. Diese wird alsdenn die wahre Wurzel der Gleichung seyn. Sind aber die beyden falsche Rational, so wird man allezeit ein kleineres Quadrate als der Coefficient p ist, finden können, wessen Reste, nachdem dasselbe von p. ist abgezogen worden, das lezte Glied ganz richtig dividiren, und dem quotient die Wurzel des quadrates geben werde, die folgends eine der falschen seyn wird.

158.) Es sey die gegebene Gleichung: $z^3 * - 28z - 48 = 0$. worinne zwey falsche Wurzeln sind. Weil der Cubus von 9, welches $\frac{1}{3}$ des Coefficieuten 28 ist, grösser ist als das quadrate von 24 der helffte des lezten Gliedes, so müsset ihr ein grösseres quadrate, als 28 ist, ergreiffen. Es sey dieses quadrate 36. ziehet 28 von 36 ab, und dividiret mit dem Reste 8 in 48, so giebet der quotient 6 die Wurzel des quadrates 36. folgends ist 6 die wahre Wurzel, die ihr gesuchet. Die falsche zu finden, nehmet ein kleineres quadrate als 28 ist, wir wollen es durch 25 versuchen, ziehet 25 von 28 ab, nnd dividiret mit dem Reste 3 in 48, so giebet der quotient 16, weil 16 die Wurzel von 25 nicht ist, zu erkennen, daß das angenommene quadrate 25 zu groß gewesen sey. Derowegen nehmet ihr abermahl ein geringeres quadrate, wir wollen es durch 16 versuchen, ziehet 16 von 28 ab, und dividiret mit dem Reste 12 in 48, so giebet der quotient 4 die Wurzel von 16, die man verlangete. folgends ist eine der falschen Wurzeln -4. und, weil die beyden falsche mit einander -6 betragen sollen, muß die andere -2 seyn. demnach sind alle drey Wurzeln; $x - 6 = 0$, $x + 4 = 0$, und $x + 2 = 0$. gefunden.

159.) hieher gehöret auch, was wir in dem vorhergehendem Falle [176.] angemercket haben; denn dieser ist von jenem nur wegen den Zeichen Unterschieden, und habe ich ihne nur mehrerer Deutlichkeit halben den Anfängern zu Liebe besonders abgehandelt

§. XII.

Anmerckung über die imaginarische Wurzeln.

160.) Ihr habet in den beyden vorhergehenden Fällen gesehen, daß in den Gleichungen sich unterweils imaginarische Wurzeln einfinden können; absonderlich in dem Falle, wo $\frac{p^3}{27}$ kleiner ist als $\frac{qq}{4}$. Wir haben auch weiter oben gelehret, daß die zwey andere Fälle, nemlich der dritten und vierten Formul niemahls davon befreyet sind. Es können aber diese imaginarische Wurzeln in einer Gleichung, die mit keinem Wurzel-Zeichen behafftet ist, nur je zwey und zwey stehen; und, damit das andere Glied aus der Gleichung abgeschaffet werde, müssen die beyde Wurzeln entweder wahre, oder zugleich falsche seyn; dergestalt, daß die dritte, welche der Summe der beyden anderen gleich ist, wahr sey, wenn jenne falsche sind, und falsch sey, wenn jenne wahr sind. damit ihr aber die Natur, und Eigenschafften dieser 4. Fällen noch deutlicher erkennen möget, so wollen wir dieses alles insbesondere abhandeln.

161.) Ehe wir aber zu dem Wercke schreitten, sollen wir erst einem Zweiffel, den das Vernunffts-Liecht selbst eingiebet, vorkommen. Es scheinet nemlich frembd, und unbegreifflich zu seyn, daß ein wahre Wurzel der Summe zweyer imaginarische Wurzeln gleich seyn solle. Allein da müsset ihr wohl in Acht nehmen, daß in diesem Falle nur die Rede von den vermengten imaginarischen Wurzeln sey. Denn, was die einfachen anbelanget, finde es unwiedersprechlich zu seyn, daß die Summe zweyer imaginarischen

Wurzeln nicht gleich seyn könne einer wahren; dannenhero ist es auch unmöglich eine cubische Gleichung zu finden, in welcher das andere Glied fehlet, und nicht mit einem Wurzel-Zeichen behafftet sey, wenn man nur einfache Imaginarische-Wurzeln dazu nimmet. Hingegen bey den vermengten imaginarischen Wurzeln, weil diese in einer cubischen Gleichung, deren das andere Glied fehlet, ohne Wurzel-Zeichen, und ohne daß die Rational-Theile einerley, die Imaginarische aber verschiedene Zeichen haben, und beynebens einerley Grössen unter dem Zeichen stehen, nicht seyn können, so wird es ganz begreifflich, und gewis, daß die Summe zweyer Imaginarischen-Wurzeln, wenn sie gleich sind, einer wahren Wurzel gleich seyn könne. Zu dessen Beweiß wollen wir setzen, es sey die eine Wurzel $+ a - \sqrt{- bb}$, und die andere $+ a + \sqrt{- bb}$. da wird es bald klar, daß, wenn man die eine zu der anderen setzet, die Summe $2a$ ein wahre wesentliche Gröse sey. Was die cubische Gleichungen angehet, die zwar ohne Wurzel-Zeichen, doch aus zwey einfachen imaginarischen Wurzeln bestehen, habet ihr schon gesehen, daß die Gleichungen von dieser Art alle Glieder haben. und will ich euch der Wahrheit bald überführen, daß man dieselbe auch durch Wegschaffung des anderen Gliedes auflösen köñe; dennoch mit der Bedingnis, daß, wenn das andere Glied einmahl ist abgeschaffet worden, die einfache Imaginarische-Wurzeln sich in vermengte Imaginarische-Wurzeln verwandeln.

162.) In dieser Supposition lässet uns zwey falsche Imaginarische-Wurzeln $x + f + \sqrt{- 3gg} = o$, und $x + f - \sqrt{- 3gg} = o$, nebst einer wahren $x - 2f = o$. die der Sum̃e der beyden anderen gleich sey, in Betrachtung ziehen; so werdet ihr bey Untersuchung des Productes dieser drey Wurzeln in einander finden, warum wir $- 3gg$ für die Grösse unter dem Zeichen

 gehalten

gehalten haben. Dieses Product wird nach verbesserter Gleichung: $x^3 * - 3ffx - 2f^3 = o$ seyn.
$+ 3ggx - 6ggf$

163.) Bey Untersuchung dieses Productes werdet ihr ferner wahr nehmen, [I.] daß, wenn $3ff$ grösser als $3gg$ ist, das dritte Glied mit $-$ bezeichnet sey, und die Gleichung mit der Formul $x^3 * - px - q = o$ des anderen Falles genau übereinstimme. [II.] Daß, wenn $3ff$ kleiner als $3gg$ ist, das dritte Glied mit $+$ bemercket sey, und die Gleichung mit der Formul $x^3 * + px - q = o$ übereinskome. [III.] Daß, wenn $3ff$ gleich $3gg$ ist, das andere und dritte Glied fehlen, und die Gleichung desjenigen Falles werde, in welchem ihr nur $- q$ auf die andere Seite übertragen, und die Cubic-Wurzel ausziehen dörffet, so gebe der Quotient $x = \sqrt[3]{q}$ die Auflösung der Aufgabe.

§. XIII.

In dem andern Falle.

164.) Wir wollen setzen $3ff$ sey grösser als $3gg$, folgends sey $x^3 - px - q = o$ die gegebene Gleichung. Vergleichet erst die beyden dritte Glieder, so bekomet ihr $- p = - 3ff + 3gg$. daraus schliesset, daß $ff - gg = \frac{p}{3}$ sey. Vergleichet auch die beyden lezten Glieder, so komet $- q = - 2f^3 - 6ggf$, und daher $f + 3ggf = \frac{q}{2}$ heraus.

Nehmet das Quadrate der wahren Wurzel $2f = 4ff$, und setzet den Werthe von $- p$, welcher $- 3ff + 3gg$ ist, hinzu, so ist die

die Summe $ff + 3gg$. Dividiret den Werthe von q, welcher $2f^3 + 6ggf$ ist, durch die Summe $ff + 3gg$, so giebet der quotient $2f$ die Wurzel des angenommenen quadrates $4ff$. dannenhero lässet sich schliessen, daß allezeit, wenn die dritte Wurzel Rational ist, ein quadrate zum Vorscheine komen werde, wessen Rest, nachdem man den Coefficienten des dritten Gliedes der gegebenen davon abgezogen, gantz genau das lezte Glied dividiren, und dem quotient die Wurzel des angenomenen quadrates gebe. Diese wird alsdenn die gesuchte Rational-Wurzel seyn.

165.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 * - 25x - 66 = 0$. wenn ihr diese Gleichung wohl betrachtet, werdet ihr wahrnehmen, daß der Cubus des Drittheiles von 25 kleiner als das quadrate der helffte von 66. sey. folgends, daß sich in der Gleichung zwey Imaginarische-Wurzeln einfinden müssen. Derowegen nehmet ihr ein grösseres quadrate als 25 ist, wir wollen es durch 36 versuchen, ziehet 25 von 36 ab, und dividiret mit dem Reste 11 in 66, so giebet der quotient 6 die Wurzel des quadrates 36. folgends ist die Rational-Wurzel $x - 6 = 0$. wollet ihr auch die Imaginarische-Wurzeln finden, so dividiret die gegebene Gleichung $x^3 * - 25x - 66 = 0$ durch die gefundene Wurzel $x - 6 = 0$.

$$\begin{array}{l|l} & x - 6 \text{ divisor.} \\ \hline x^3 - 25x - 66 & xx + 6x + 11 \\ x^3 - 6xx & \\ \hline * + 6xx - 25x - 66 & \\ \quad + 6xx - 36x & \\ \hline * \quad + 11x - 66 & \\ \quad\quad + 11x - 66 & \\ \hline \quad * \quad * & \end{array}$$

Der quotient $xx + 6x + 11$ giebet eine Gleichung des anderen

Grades, die die beyeden Imaginarische-Wurzeln enthält. Wenn ihr sie nach Lehre des vorhergehenden Capitels auflöset, so findet ihr die beyden Imaginarische-Wurzeln: $x + 3 - \sqrt{-2}$, und $x + 3 + \sqrt{-2}$ zu seyn.

Anmerrkung.

166.) Wenn ihr bey Untersuchung der Rational-Wurzel kein quadrate, welches die erforderliche Eigenschafften enthält, finden könnet, so habet ihr ein untrügliches Kennzeichen, daß die gesuchte Wurzel imaginarisch sey. Dergleichen Wurzeln müsset ihr alsdenn auf folgende Weise suchen:

Nehmet die Gleichungen $ff - gg = \frac{p}{3}$, und $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$. die ihr oben durch Vergleichung der Glieder bekomen habet, und erhebet die erste zur dritten, und die andere zu der anderen Dignität, so komet $f^6 - 3ggf^4 + 3g^4ff - g^6 = \frac{p^3}{27}$ und $f^6 + 6ggf^4 + 9g6ff = \frac{qq}{4}$ heraus. Da nun $\frac{p^3}{27}$ kleiner als $\frac{qq}{4}$ ist, so muß die erste Gleichung von der anderen ab- und aus dem übergebliebenen $9ggf^4 + 6g^4ff + g^6 = \frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}$ die quadrate Wurzel $3gff + g^3 = \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$ ausgezogen werden.

Addiret diese lezte Gleichung zu $f^3 + 3ggf = \frac{q}{2}$, so giebet

die Summe $f^3 + 3ggff + 3ggf + g^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$ eine cubische Gleichung, dereen Wurzeln $f + g = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$ ist. Dividiret die Gleichung $ff - gg = \frac{p}{3}$ durch die erst gefundene Cubic-Wurzel, so giebet der quotient $f - g = \frac{\frac{p}{3}}{\sqrt[3]{\frac{q}{4} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}}$ Endlich addiret $f + g$, und $f - g$, und ihre Werthe zusamen, so ist die Summe $2f = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}}$ die wesentliche Wurzel.

167.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 - 6x + 16 = 0$. in welcher zwey Irrational-Wurzeln sind. machet $6 = p$. und $16 = q$. so wird $\frac{p^3}{27} = 8$. und $\frac{qq}{4} = 64$. ziehet 8 von 64, und 56 die Quadrat-Wurzel; addiret $\sqrt{56}$ zu $\frac{q}{2} = 8$, und

ziehet

ziehet aus der Summe $8 + \sqrt{56}$ die Cubic-Wurzel, so ist diese: $\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$ der erste Theil der Wurzel. dividiret $\frac{1}{3} p = 2$ durch $\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$, und setzet den Quotienten $\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}$ zu dem erste Theile $\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$, so komet in der Sume $x = \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}} + \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}}$ die gesuchte Wurzel heraus.

§. XIV.

Uber den vierten Falle.

168.) Es sey die gegebene Gleichung: $x^3 * + px - q = 0$. nehmet die oben angeführte in der neue gefundene Gleichung, und setzet $3ff$ sey kleiner als $3gg$, so wird die herauskomende Gleichung gleich der gegebenen:

$$x^3 * - 3ffx - 2f^3 = 0$$
$$+ 3ggx - 6ggf.$$

Die Vergleichung der Glieder giebet $p = -3ff + 3gg$ oder $\frac{p}{3} = -ff + gg$. und $-q = -2f - 6ggf$ oder $\frac{1}{2}q = f + 3ggf$. demnach ist wegen dem lezten Gliede $-q$, welches das Minder-Zeichen führet, die wesentliche Wurzel wahr, und daher $+2f$.

nehmet

nehmet das quadrat von $2f = 4ff$. setzet den Werthe von p, das ist, $-3ff + gg$ zu $4ff$, und dividiret durch die Sum̃e $ff + 3gg$, welche herauskom̃et, den Werth von q, welcher $2f^3 + 3ggf$ ist, so giebet der quotient $2f$ die gesuchte Wurzel. derowegen dörffet ihr nur dahier, wie in dem vorhergehenden Falle verfahren, so bekom̃et ihr, was man verlangete.

169.) Es sey gegeben: $x^3 * + 3x - 76 = 0$. in dieser Gleichung sind zwey Irrational-Wurzeln enthalten. Nehmet das Quadrate 4, und setzet 4 zu dem Coefficienten 3, so zeiget die Sum̃e 7, daß, wenn man das dritte Glied 76 durch 7 dividiret, der quotient die Wurzel von 4 nicht seye. Derowegen nehmet ein höheres Quadrate, wir wollen es durch 9 versuchen, setzet 9 zu 3, und dividiret durch die Summe 12 das dritte Glied 76, so zeiget abermahl der quotient 6, welcher herauskom̃et, daß dieses quadrate zu klein gewesen sey; dannenhero nehmet ihr annoch ein höheres quadrate, wir wollen es durch 16 versuchen, setzet 16 zu dem Coeffitienten 3, und dividiret durch die Summe 19 das lezte Glied 76, so giebet der Quotient 4 die verlangte Wurzel des quadrates 16. folgends ist die gesuchte Wurzel $x - 4 = 0$. die imaginarische Wurzeln zu finden, dividiret die gegebene Gleichung $x^3 + 3x - 76$ durch die gefundene Wurzel $x - 4 = 0$.

$x - 4$ divisor.

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 & +3x & -76 & & xx + 4x + 19 \\
x^3 & -4xx & & & \\
\hline
* & +4xx & +3x & -76 & \\
 & +4xx & -16x & & \\
\hline
* & & +19x & -76 & \\
 & & +19x & -76 & \\
\hline
 & * & * & &
\end{array}$$

So giebet der Quotient $xx + 4x + 19$ eine quadratische Gleichung, in welcher die beyde imaginarische Wurzeln enthalten sind. Ihr könnet dieselbe nach der oben gelehrten Weise auflösen, so findet ihr für die eine $x + 2 - \sqrt{-15}$ und für die andere $x + 2 + \sqrt{-15}$.

Anmerkung.

170.) Wenn ihr bey Untersuchung der Rational-Wurzel kein Quadrate, welches die erforderliche Eigenschafften hat, finden könnet, so habet ihr ein untrügliches Zeichen, daß die gesuchte Wurzel entweder Irrational oder Imaginarisch sey. Alsdenn müsset ihr dieselbe also suchen:

Nehmet die Gleichung $\frac{1}{3}p = -ff + gg$, und $\frac{1}{2}q = f^3 + 3ggf$. versetzet, damit die falsche Grösse $-ff$ auf beyden Seiten einerley Zeichen habe, die erste Gleichung, wie dahier: $ff - gg = -\frac{1}{3}p$. und erhebet diese zu der dritten, die andere aber zu der zweyten Dignität, so kommet für dise $f^6 - 3ggf^4 + 3g^4ff - g^6 = -\frac{1}{2}p^3$, und für jene $f^6 + 6ggf^4 + 9g^4ff = \frac{1}{4}qq$ heraus.

Ziehet die erste von der anderen ab, und aus dem Reste $9ggf^4 + 6g^4ff + g^6 = \frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$ die Quadrat-Wurzel aus, so bekommet ihr $3gff + g^3 = \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$.

Addiret diese Gleichung zu der Gleichung $f^3 + 3ggf = \frac{1}{2}q$, und ziehet aus der Summe: $f^3 + 3gff + 3ggf + g^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ die Cubic-Wurzel aus, so habet ihr $f + g = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Dividiret

Dividiret $ff - gg = -\frac{1}{2}p$ durch diese lezte Gleichung, so bekommet ihr

$$f - g = -\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}.$$

Setzet $f + g$ zu $f - g$, und ihre Werthe zusammen, so giebet die Summe

$$+ 2f = + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p}} - \frac{\frac{1}{3}p.}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$$

die gesuchte Wurzel.

171.) Demnach bestehet die Regel diese Gleichungen aufzulösen, haubtsächlich darinnen, daß, wenn die Gleichung $-p$ enthält, man $\frac{1}{27}p^3$ von $\frac{1}{4}qq$ ab- und aus dem Reste die Quadrat-Wurzel ausziehen, $\frac{1}{2}q$ dazu addiren, und aus der Summe die Cubic-Wurzel extrahiren müsse; so sey der Quotient der erste Theil der Wurzel. Hernach müsse man $\frac{1}{3}p$ durch diesen Theile dividiren, so gebe der quotient den anderen Theil. Ubrigens erhellet aus der vorhergehenden Formule, wie man sich bey der Gleichung, die das $+p$ hat, zu verhalten habe.

§. XV.

Uber den ersten, und dritten Falle.

172.) Wir supponiren in diesen beyden Fällen, es seyen zwey wahre, und eine falsche Wurzel vorhanden. Derowegen nehmen wir für die zwey Imaginarische $x - f - \sqrt{-3gg} = o$, und $x - f + \sqrt{-3gg} = o$.

für die wesentliche aber $x + 2f = o$ an. Das Producte dieser 3. Wurzeln in einander giebet:

$$x^3 * - 3ffx + 2f^3 = o$$
$$+ 3ggx + 6ggf.$$

Bey Untersuchung dieser Gleichung werdet ihr wahrnehmen, daß, wenn $3ff$ grösser als $3gg$ ist, das dritte Glied mit − bezeichnet sey, und die Gleichung zu der Formul $x^3 - px + q = o$ des ersten Falles gehöre. Hingegen, wenn $3ff$ kleiner als $3gg$ ist, sey das dritte Glied mit + bemercket, und gehöre die Gleichung zu der Formul: $x^3 * + px + q = o$. des dritten Falles. Endlich, wenn $3ff = 3gg$ ist, werde das dritte Glied fehlen, die Gleichung aber zu der leichtesten Formul: $x^3 * * + q = o$ gehören, von welcher wir oben gelehret, daß man nur das q auf die andere Seite übertragen, und die Cubic-Wurzel ausziehen solle, so sey geschehen, was man verlangete.

173.) Es sey die gegebene Gleichung: sey $x^3 * - px + q = o$. die Formul des ersten Falles. Vergleichet die Glieder, so habet ihr $-p = -3ff + 3gg$, und daher $ff - gg = \frac{1}{3}p$. und $q = 2f^3 + 6ggf$, oder $\frac{1}{2}q = f^3 + 3ggf$.

Im Falle, wo die wesentliche Wurzel Rational ist, müsset ihr das quadrate $4ff$ von dieser Wurzel zu dem Werthe von $-p$, welcher $-3ff + 3gg$ ist, addiren, und mit der Sume, welche herauskomet, den Werth von q. dividiren, so giebet der Quotient $2f$ die Wurzel des Quadrates $4ff$.

Hingegen, wenn die wesentliche Wurzel Irrational ist, müsset ihr die Gleichungen: $ff - gg = \frac{1}{8}p$. und $\frac{1}{2}q = f^3 + 3ggf$, welche ihr in der Vergleichung der Glieder gefunden habet, ergreiffen, übrigens aber nach Lehre des vorhergehenden Falles verfahren, so bekomet ihr:

$-2f = -\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \dfrac{\tfrac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq\,\tfrac{1}{27}p^3}}}$
für die gesuchte Wurzel.

174.) In dem dritten Falle sey die gegebene Gleichung: $x^3 * + px + q = 0$. vergleichet die Glieder, so bekommet ihr $p = -3ff + 3gg$. hieraus schliesset, daß $ff - gg = -\tfrac{1}{3}p$, und, weil $q = 2f^3 + 6ggf$ ist, $\tfrac{1}{2}q = f^3 + 3ggf$ seyn müsse.

175.) In dem Falle, wo die wesentliche Wurzel Rational ist, müsset ihr den Werth von p zum Quadrate $4ff$ der wesentlichen Wurzel addiren, und durch die Summe den Werth von q dividiren, so giebet der Quotient die Wurzel $2f$ des Quadrates $4ff$. wie in dem vierten Falle geschehen.

176.) Ist aber die Wurzel Irrational, so müsset ihr die Gleichungen $ff - gg = -\tfrac{1}{3}p$. und $\tfrac{1}{2}q = f^3 + 3ggf$, die ihr oben durch die Vergleichung der Glieder gefnnden habet, zu handen nehmen, übrigens aber nach Lehre des vierten Falles verfahren, so bekommet ihr $-2f = -\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$

$-\dfrac{\tfrac{1}{3}p.}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}}$ für die gesuchte Wurzel.

177.) Demnach ist die allgemeine Regel, daß, wenn die wesentliche Wurzel Irrational ist, und sich $-p$ in der Gleichung befindet, man allezeit ein Quadrate finden werde, wessen Rest nach abgezogenen p (denn $-p$ addiren, ist dasselbe subtrahiren) gantz richtig das lezte Glied dividiren, und dem Quotient die Wurzel des quadrates geben werde. Dieses wird die wahre Wurzel seyn,

wenn sich in der Gleichung $-q$, und die falsche, wenn sich $+q$ befindet. Enthält aber die Gleichung $+p$, so wird man allezeit ein quadrate finden, durch welches, wenn man p hinzusetzet, man das lezte Glied richtig dividiren, und für den quotient die Wurzel des quadrates bekommen kan. Dieses wird die wahre Wurzel seyn, wenn sich in der Gleichung $-q$, und die falsche, wenn sich $+q$ befindet. Jezt habe ich das nützlichste von den cubischen Gleichungen beygebracht, und begnüge mich die gegebenen Regeln durch die 3. folgenden Aufgaben zu erläutern.

§. XVI.

Aus der gegebenen Summe zweyer Grössen, und dem Unterscheide ihrer Cuborum, die Grössen selber zu finden.

Aufgabe.

178.) Zwey Officiers haben 6. Thaler dergestalt unter sich getheilet, daß der Unterscheide ihrer Cuborum beyder Antheilen 56. betragen.

Auflösung.

Nennet die Summe der 6. Thaler $= 2a$ den Unterscheid der beyden Antheilen $= 2y$ den Unterscheid der Cuborum $56 = 2b$. so ist der Antheil des ersten $a + y$, und des anderen $a - y$. erhebet die beyde Antheile zur dritten Dignität, und ziehet einen von dem anderen ab, so ist

$a^3 + 3aa + 3ayy + y^3.$ Cubus des ersten.
$a^3 - 3aa + 3ayy - y^3$ des anderen.

$* + 6aay \quad * \quad + 2y^3.$ Unterscheid.

$2y^3 + 6aay = 2b \mid 2$

$y3 + 3aay = b$

$y^3 * 3aay - b = o.$

Der Unterscheide $6aay + 2y^3$, oder $2y^3 + 6aay$. welcher nach den Bedingnüssen der Aufgabe gleich $2b$ ist. Daher erlangen wir die erste Fundamental-Gleichung: $2y^3 + 6aay = 2b$. und nach verrichteter Division durch 2, eine Gleichung $y^3 + 3aay = b$ des dritten Grades, in welcher die Ordnung der Zeichen an Tage giebet, daß zwey erdichtete, und eine wesentliche Wurzel vorhanden sind; indeme nach versezten Gliederen die Gleichung also beschaffen

$$y^3 * + 3aay - b = o.$$

Bey Untersuchung dieser Gleichung werdet ihr finden, daß, demnach $b = 28$, und $a = 3$ ist, der Coefficiens $3aa$ des dritten Gliedes $= 27$ seyn müsse; dannenhero, wenn ihr das quadrdt i nehmet, zu dem Coefficienten 27 setzet, uad die Summe 28 durch das lezte Glied $b = 28$ dividiret, so giebet der quotient i die Wurzel des quadrates i; folgends ist die wesentliche Wurzel $y - i = o$; oder $y = i$. demnach muß der Antheil des ersten $a + y = 3 + i = 4$, und des anderen $a - y = 3 - 1 = 2$ seyn.

Probe.

Denn der Cubus von $4 = 64$, und von $2 = 8$. daher ist ihr Unterscheide 56; und $2 + 4 = 6$.

§. XVII.

§. XVII.

Aus dem gegebenen Unterscheide zweyer Grössen, und dem Unterscheide ihrer Biquadraten, die Grössen selber zu finden.

Aufgabe.

179.) Lactantius befande sich in Gesellschafft mit einem Mathematico, welcher ihm das Lob der Algebra gar zu hoch anzustimmen schiene; er lässet sich wieder ihn in ein Gewett von 10. Thalern ein, er werde die Anzahl der Ducaten, welche er in seinen Händen habe, nicht errathen, wenn er ihm schon offenbahre, daß in der rechten 3. mehr als in der lincken seyen, und daß der Unterscheide ihrer Biquadraten 609. ausmache. Man fraget, wie dieser Mathematicus das Gewett gewonnen habe.

Auflösung.

Es sey die Summe der Ducaten in beyden Händen $= 2z$, der Unterscheide $3 = 2a$, und der Unterscheide ihrer Dignitäten $609 = 2b$. so ist die Anzahl der Ducaten in der einen Hand $z + a$, und in der anderen $z - a$. erhebet die beyde Anzahlen $z + a$, und $z - a$ zur vierten Dignität, ziehet die eine von der anderen, und nehmet ihren Unterscheide, stehet also:

$$z^4 + 4az^3 + 6aaz^2 + 4a^3z + a^4$$
$$z^4 - 4az^3 + 6aaz - 4a^3z + a^4$$
$$* \quad 8az^3 \quad * \quad + 8a^3z \quad *$$
$$8az^3 + 8a^3z = 2b$$
$$4az^3 + 4a^3z = b$$
$$z^3 + aaz = \frac{b}{4a}$$
$$z^3 + aaz - \frac{b}{4a} = 0.$$

So bekom̃et ihr die erste Fundamental-Gleichung: $8az^3 + 8a^3 = 2b$. dividiret durch 2, und den Quotienten $4az^3 + 4a^3z = b$ durch $4a$, so kommet $z^3 + aaz = \frac{b}{4a}$ heraus; versetzet die Glieder, so ist $z^3 + aaz - \frac{b}{4a} = 0.$ eine Gleichung des dritten Grades, in welcher sich eine wesentliche, und zwey erdichtete Wurrzeln befinden. Da nun $a = \frac{3}{2}$, und $b = 304\frac{1}{2}$, so ist $aa = \frac{9}{4}$, und $\frac{b}{4a} = \frac{304\frac{1}{2}}{6}$. Multiplicieret alles durch 2, so giebet das Producte $\frac{b}{4a} = \frac{609}{12}$, reduciret diesen Bruch zu dem Nenner 4; (dieses geschiehet, wenn ihr mit 3 dividiret) so kom̃et der Quotient $\frac{b}{4a} = \frac{203}{4}$ heraus. Wenn dieses geschehen, so er-

greiffet ein Quadrate, welches gesetzet zu $\frac{9}{4}$, das andere Glied $\frac{203}{4}$ dergestalt dividire, daß der quotient die Wurzel des angenom̃enen quadrates gebe. Bey Untersuchung dieses quadrates werdet ihr durch die quadrate $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{25}{4}$, $\frac{36}{4}$ die Sache umsonst versuchen; derowegen nehmet abermahl ein höheres Z. E. $\frac{49}{4}$, und stellet die Probe mit diesem an, so werdet ihr finden, daß, wenn ihr $\frac{9}{4}$ zu $\frac{49}{4}$ setzet, und $\frac{203}{4}$ durch die Summe $\frac{58}{4}$ dividiret, der quotient $3\frac{29}{58}$ oder $3\frac{1}{2}$, welches die Wurzel von $\frac{49}{4}$ ist, gebe; denn die Wurzel von $\frac{49}{4}$ ist $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. dannenhero ist die wesentliche Wurzel $z - \frac{7}{2} = 0$ oder $z = \frac{7}{2}$. folgends waren in der einen $z + a = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$, und in der anderen Hand $z - a = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$. Ducaten.

Probe.

Die vierte Dignitäten von $5 = 625$ und von $2 = 16$. geben dem Unterscheide 609; denn $625 - 16 = 609$. und $5 - 2 = 3$.

§. XVIII.

§. XVIII.

Aus dem gegebenen Reste eines Cubi Nach abgezogener Wurtzel etlich mahl genommen, die verborgene Wurzel zu finden.

Aufgabe.

180.) Ein Vatter wollte unter seinen Kinderen, welche die Mathematick studierten, einen Eifer erwecken; er verbürget in einem Beutel eine gewisse Summe Geldes, und verspricht dasselbe demjenigen zu geben, welcher errathen werde, wie groß die Summe des verborgenen Geldes sey, wenn er nur dieses offenbahre, daß der Cubus der verborgenen Summe, weniger 76 mahl die nemliche Summe gleich sey 240. Eines unter den Kinderen errathet die Aufgabe; man fraget, wie solches geschehen sey?

Auflösung.

Nennet die unbekannte Summe $= z$, so geben die Bedingnussen, der Aufgabe diese Gleichung: $z^3 - 76z = 240$ oder $z^3 * - 76z = 240 = 0$. des dritten Grades, in welcher zwey falsche, und ein wahre Wurzel ist; damit ihr aber wissen möget, ob keine erdichtete verborgen sind, dörffet ihr nur $\frac{1}{3}$ von $76 = 25\frac{1}{3}$, und die helffte von $240 = 120$ nehmen; so werdet ihr, weil der Cubus von $25\frac{1}{3} = 16258\frac{10}{27}$ grösser ist als das quadrate von $120 = 14400$. wahrnehmen, und klar verstehen können, daß $\frac{p^3}{27}$ grösser als $\frac{qq}{4}$, folgends, daß keine erdichtete Wurzel vorhan-

 den

den seyen, und dieses um so ehender, weil das dritte Glied mit dem Minder-Zeichen bemercket ist, und die beyde falsche Wurzeln ungleich sind; denn im wiedrigen Falle wäre $\frac{p^3}{27} = \frac{qq}{4}$.

181.) Derowegen nehmet ein grösseres Quadrate, als der Coefficient 76 ist, und ziehet von demselben 76 ab, so muß das übergebliebene das lezte Glied gantz richtig dividiren, und dem quotienten die Wurtzel des angenommenen quadrates geben. Da nun das qnadrate 81, welches nächst auf 76 folget, die erforderliche Eigenschaften nicht hat, so müsset ihr das quadrate 100 versuchen; derowegen ziehet 76. von 100 ab, und dividiret mit dem Reste 24 in 240, so giebet der quotient 10 die Wurzel des quadrates 100. folgends ist die wahre Wurzel $x - 10 = 0$ oder $x = 10$. die Summe des in dem Beutel verborgenen Geldes.

182.) Unterdessen, da dieser die Aufgabe aufgelöset, haben die beyde andere die falsche Wurzeln zu finden sich bemühet. Der eine, nachdem er die Sache vergebens durch die quadrate 64 und 49 versuchet, nim̃et das quadrate 36, ziehet 36 von 76 ab, und dividiret 240 durch 20. der quotient gabe ihm 6 die Wurzel des quadrates 36. da vermeinte er, die Aufgabe sey aufgelöset, wenn er sage, es seyen 6. fl. in dem Beutel.

Der andere versuchte die Auflösung durch das quadrate 25. da er aber nicht kunte darmit zu recht kom̃en, nahme er das quadrate 16, ziehet dasselbe von 76 ab, und dividiret 240 durch 60; da findet er, daß, der quotient 4 die Wurzel von 16. sey. Dañenhero vermeinte er, die Aufgabe sey errathen, wenn er sage, es seyen 4 fl. in dem Beutel. Allein es haben beyde sehr geirret, weil sie anstatt der falschen die wahre Wurzeln hätten suchen sollen.

Das

Das Sechste Capitel.

Allgemeine Regel die Gleichungen des Dritten, vierten, fünfften, &c. &c. Grades aufzulösen.

§. I.

Grundsatz.

183.) Die Regeln, so wir bisher in Auflösung der Gleichungen des dritten Grades erkläret haben, sind zwar sehr künstlich, und sinnreich ausgedacht worden, und haben ihren vielfältigen Nutzen; dennoch aber wolte ich nicht gerne, daß man diese allgemeine Regel für Unnütze hielte, und daher aus Verachtung übergienge, weil auch in dem dritten Grade gewisse Fälle vorkommen können, da man sie ohne sich eines Vortheiles zu begeben nicht wohl entrathen kan. Ja ihr werdet bald ihren Nutzen, nicht nur, wenn ihr alle Rational-Wurzeln, die in einer Gleichung des dritten Grades enthalten sind, finden sollet, sondern auch in Auflösung der Gleichungen des vierten, fünfften, sechsten &c. und auch höheren Graden, nach Belieben, verspühren; anerwogen man ohne diese Regel die höheren Gleichungen aufzu-

lösen nicht vermögend ist. Ich habe sie zu fernern Erläuterung der 113ten Aufgabe der Algebraischen Anfangs-Gründen des Herrn von Wolffen eingerichtet.

184.) Es beruhet aber diese Regel auf einem Grundsatze, welchen ich dahier erläutern soll. Ihr wisset nemlich, daß, wenn ihr die einfachen Gleichungen in einander multipliciret, die höheren herauskommen [Cap. IV. §. II. n. 94.] und daher, weil die Division zertheilet, was die Multiplication durch Vermehrung zusammen gefüget hat [P. I. Cap. II. §. VII. n. 58.] müsse man dieselbe wieder aufzulösen durch ihre producenten dividiren. Da nun die producenten unbekannt sind, werdet ihr fragen, durch welche Divisores dieses geschehen könne? wenn ihr aber bedencket, daß das lezte Glied in einer jeden Gleichung aus den bekannten Grössen, welche ein Product aller bekannten Wurzeln in einander sind, bestehe [Cap. IV. §. III. n. 102.], so werdet ihr euch selbst diese Frage beantworten, denn ihr werdet sagen, dieses könne leicht geschehen, wenn man alle Divisores der gegebenen Zahl des lezten Gliedes ausfindig machet, und die Gleichung durch dieselbe dividiret; denn solchergestalt seyen diejenigen Zahlen, durch welche sie sich dividiren lässet, die gesuchte Divisores, oder National-Wurzeln der Gleichung. Dannenhero bestehet das Fundament dieser allgemeinen Regel in der Weise alle mögliche Divisores einer gegebenen Zahl ausfindig zu machen. Nun obwohlen ich dieses erst in dem dritten Theile abzuhandeln gesinnet bin, so halte dennoch für nutzlich, damit die Lehr-Jünger in ihrem Fortgang nicht gehinderet werden, diese Materie, in so weit sie dahier nöthig ist, in der folgenden Aufgabe zu erläutern.

§. II.

§. II.

Alle mögliche Divisores einer gegebenen Zahl zu finden.

Aufgabe.

Es sey die gegebene Zahl 4320.

Auflösung.

185.) Nehmet die einfache Zahlen 2. 3. 5. 7. rc. es sind aber einfache Zahlen, die nur durch die Einheit, oder durch sich selbst ohne Reste dividiret werden können, und dividiret 4320 erst durch 2, so giebet der quotient 2160, und bleibet nichts übrig; folgends ist 2 ein richtiger Divisor der gegebenen Zahl. Dividiret hernach diesen quotienten 2160 noch einmahl durch 2, so kommet 1080 heraus, und bleibet nichts übrig. Dividiret ihr ferners 1080 durch 2, so kommet 540 heraus. Dividiret ihr weiters 540 durch 2, so kommet 270 heraus, welches durch 2 dividiret einen quotienten 135 giebet, der sich durch 2 nicht mehr dividiren lässet. Derowegen nehmet ihr einen anderen einfachen Divisorem 3, und dividiret 135 durch 3, so giebet der quotient 15, und ferners durch 3 dividiret, 5. da nun 5 nicht weiters als durch 1, oder 5 dividiret werden kan, so dividiret 5 durch 5, und der quotient giebet 1.

2	2	2	2	2	3	3	3	5	
4320	2160	1080	540	270	135	45	15	5	1.

Dannenhero sind die einfache Divisores: 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3. 3. 5. 1.

Nun

Nun weil sich diese Zahl nach und nach durch 2. 2. 2. 2. 2. dividiren lässet, und es auf eines herauskommet eine Zahl nach und nach durch mehrere, oder dieselbe so gleich durch das Product aller Divisorn in einander zu dividiren, so wird es klar, daß die Divisores 2. 2. eben denselben quotienten geben, welcher durch ihr Producte 4 in einander herauskommen wäre; folgends ist auch 4 ein richtiger Divisor. Und daher geben auch die drey Divisores 2. 2. 2. in einander multipliciret durch ihr Producte 8. einen neuen Divisorem 8. Die vier Divisores 2. 2. 2. 2. durch einander multipliciret geben im Producte 16 noch einen neuen Divisorem 16. endlich giebet das Product der 5 Divisorn 2. 2. 2. 2. 2. annoch einen neuen Divisorn 32. folgends bekommet ihr in dem Producte der einfachen Divisorn von 2 noch diese vier Divisores 4. 8. 16. 32. Eben diesen Vernunfft-Schluß könnet ihr auch bey den drey einfachen Divisorn von 3 anbringen, so findet ihr in ihrem Producte in einander noch zwey andere Divisores 9 und 27.

Wenn dieses geschehen, so multipliciret ihr den einfachen Divisorem 2, und seine vielfältige 4. 8. 16. 32. durch den einfachen Divisorem 3, und seine vielfältige 9 und 27. so kommen 15 neue Divisores: 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864. heraus. Multipliciret ihr ferners den einfachen Divisorem 5 durch den einfachen Divisorem 2 und seine vielfältige; durch den einfachen Divisorem 3, und seine vielfältige, und endlich durch die 15 vorhergehende neue Divisores, so kommen 23 richtige Divisores: 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 90. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320. heraus.

Demnach, wenn ihr die Einheit, welche auch ein Divisor ist, hinzu, und einen jeden Divisorem nur einmahl ansetzet, so bekommet ihr diese 48 folgende Divisores: 1. 2. 3. 4. 5. 8. 16. 32. 9. 27. 6. 12. 24. 48. 96. 18. 36. 72. 144. 288. 54. 108. 216. 432. 864.

864. 10. 20. 40. 80. 160. 15. 45. 135. 30. 60. 120. 240. 480. 90. 180. 360. 720. 1440. 270. 540. 1080. 2160. 4320. Es ist auch klar, und durch die Operation selbst erwiesen, daß die gegebene Zahl keine fernere Divisores haben könne.

§. III.

Alle Rational-Wurzeln, die in einer gegebenen Gleichung enthalten sind, zu finden.

186.) Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. deren Rational-Wurzeln ihr finden sollet. Weil das lezte Glied 24 das Product aus allen Wurzeln ist [Cap. IV. §. III. n. 102.] so zerfället es in die Zahlen, durch deren Multiplication es entstehet, das ist, suchet nach Lehre der vorhergehenden Aufgabe alle mögliche Divisores der Zahl 24. stehet also:

2	2	2	3	
24	12	6	3	1

So findet ihr, wenn ihr eine jede Zahl nur einmahl ansetzet, diese 8. Divisores: 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. und 24. nehmet die unbekannte Wurzel x, und machet daraus folgende einfache Gleichungen:

$x = 1$ oder $x - 1 = 0$
$x = 2$ $\quad x - 2 = 0$
$x = 3$ $\quad x - 3 = 0$
$x = 4$ $\quad x - 4 = 0$. ꝛc.

So habet ihr so viele wahre Wurzeln, als ihr Divisores habet.

Ingleichen machet auch die falsche Gleichungen:

$x = -1$ oder $x + 1 = 0$
$x = -2$ $x + 2 = 0$
$x = -3$ $x + 3 = 0$
$x = -4$, $x + 4 = 0$ ꝛc.

So bekommet ihr so viele falsche Wurzeln, als ihr wahre habet.

Dividiret die gegebene Gleichung durch diese einfachen, und versuchet, durch welche die Division, daß nichts übrig bleibe, verrichtet werden könne; denn durch die sie sich dividiren lässet, die zeigen ihre Rational-Wurzeln.

$x^3 - 9x^2 + 26 - 24$	$x - 2$
$x^3 - 2x^2$	$xx - 7x + 12$
$* - 7x^2 + 26x - 24$	
$- 7x^2 + 14x$	
$* + 12x - 24$	
$+ 12x - 24$	
$* \quad *$	

Wenn ihr durch $x - 2$ dividiret, so giebet der Quotient $xx - 7x + 12$ eine quadratische Gleichung, und bleibet nichts übrig. Folgends ist $x - 2 = 0$ ein richtiger Divisor, und daher $x = 2$ die wahre Wurzel.

187.) Die beyden anderen zu finden, dividiret ihr den quotienten, welcher herauskommet, $xx - 7x + 12$ auf gleiche Weise, das ist, ihr suchet die Divisores des lezten Gliedes 12, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 12. und machet abermahl die wahre, $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ ꝛc. und die falsche Wurzeln $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$ ꝛc. Dividiret erst durch die wahre, bis ihr eine findet, durch welche die Division gantz richtig angehet.

$$
\begin{array}{l|l}
xx - 7x + 12 & x - 3 \text{ divisor.} \\
xx - 3x & x - 4 \text{ quotient.} \\
\hline
* - 4x + 12 & \\
\quad - 4x + 12 & \\
\hline
\quad * \quad * &
\end{array}
$$

Wenn ihr die Division also versuchet, so findet ihr, daß $x - 3 = 0$ ein richtiger Divisor, und der Quotient $x - 4 = 0$ ein wahre Wurzel sey. Folgends sind alle drey $x = 2$, $x = 3$, und $x = 4$ wahre Wurzeln, welches auch die abwechselende Ordnung der Mehr- und Minder-Zeichen andeutet.

Anmerkung.

188.) Wenn ihr euere Division auf solche Weise fortsetzet, und keinen Divisorem unter den wahren antreffet, durch welchen die Gleichung sich ohne Rest dividiren lässet, so habet ihr ein untrügliches Zeichen, daß in der Gleichung kein wahre ermeßliche oder Rational-Wurzel sey; und in diesem Falle dividiret ihr durch die falsche Wurzeln, bis ihr eine findet, durch die ihr ganz richtig die gegebene Gleichung dividiren möget; die Quotiente, welche herauskommen, geben die falsche Wurzeln. Wenn ihr aber auch unter den falschen keine findet, durch welche die Division sich verrichten lässet, so habet ihr abermahl ein untrügliches Zeichen, daß die Gleichung auch keine falsche ermeßliche oder Rational-Wurzeln habe.

§. IV.

§. IV.

Es wird gegeben der Rest, wenn von dem Producte zweyer Cuborum in einander das Producte der Wurzeln, etliche mahl genommen, abgezogen wird; man soll die Wurzeln selber finden.

Aufgabe.

189.) Zwey Freunde haben ein gewisse Anzahl der Goldstücker, von welcher man mehr nicht weiß, als daß die beyden Zahlen cubiret, und in einander multiplicieret, nach abgezogenem Producte der Wurzeln in einander, 8. mahl genommen, im Reste 168. lassen. Man fraget nach den beyden Zahlen der Goldstücker.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Goldstücker des einen $= x$, und des andern $= y$, so ist der Cubus x^3 des einen, und y^3 des anderen, ihr Producte aber $x^3 y^3$, und das Product der Wurzeln $x y$, welches 8 mahl genommen, $8 x y$ giebet; ziehet $8 x y$ von dem Prodncte der Cuborum, so wird $x^3 y^3 - 8 x y$ nach den Bedingnisse der Aufgabe gleich 168, stehet also: $x^3 y^3 - 8 x y = 168$. bringet die andere Seite 168 durch die Subtraction auf ein 0. so ist $x^3 y^3 - 8 x y - 168 = 0$. zerfället das lezte Glied 168 in die Zahlen, durch deren Multiplication es entstehet, welche sind 1. 2. 3. 4. 6. 7. 8. 12. 21. 24. 42. 84. 168. machet die einfachen Gleichungen so wohl der wahren, als falschen Wurzeln, so geben diese $x y - 1 = 0$, $x y - 2 = 0$. $x y - 3 = 0$, $x y - 4 = 0$, rc. und jene $x y + 1 = 0$, $x y + 2 = 0$, $x y + 3 = 0$, rc. dividiret die Gleichung durch diese einfachen, so findet ihr nach vielen Versuchen, daß die Division durch $x y - 6 = 0$ richtig sey, wie aus dieser Operation erhellet:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 y^3 - 8xy - 168 & xy - 6. \text{ Divisor.} \\
x^3 y^3 - 6x^2 y^2 & x^2 y^2 + 6xy + 28 \\
\hline
* + 6x^2 y^2 - 8xy - 168. & \\
 + 6x^2 y^2 - 36xy & \\
\hline
* \quad + 28xy - 168 & \\
 \quad + 28xy - 168 & \\
\hline
 \quad * \qquad * &
\end{array}
$$

Demnach ist die gesuchte Rational-Wurzel $xy - 6 = 0$, oder $xy = 6$. Wollet ihr den Antheil eines jeden insonderheit erfahren, so betrachtet, daß, weil $xy = 6$ ist, $x = \frac{6}{y}$, und $y = \frac{6}{x}$ seyn müsse. Da nun keine fernere Gleichungen mehr zu erdencken sind, und dennoch zwey unbekannte, x und y, übrig bleiben, so erhellet, daß die Aufgabe undeterminiret sey, und man in die Stelle von x und y Zahlen nach Belieben annehmen könne, wenn sie nur richtige Divisores von 6. sind. Derowegen setzet weil die Divisores von 6. nur 1. 2. 3. und 6. sind, es sey $y = 1$, so ist $x = \frac{6}{y} = \frac{6}{1} = 6$. denn $\frac{6}{1} = 6$. oder setzet $y = 2$, so ist $x = \frac{6}{y} = \frac{6}{2} = 3$. denn $2 \times 3 = 6$. es ist auch würcklich der Cubus von $6 = 216$, und das Product der Wurzeln 2 und $3 = 6$ acht mahl genommen $= 48$, und von 216 abgezogen, lässet 168. welches die Bedingnissen der Aufgabe erfüllet.

§. V.

Aus dem gegebenen Multiplicante, und des Productes Reste nach abgezogenem Biquadrate der Zahl, die man suchet, die Zahl selber zu finden.

Aufgabe.

190.) In einem Zeughauß ist ein gewisse Anzahl neu-gegossener Mörseln. Wenn man ihre Zahl durch 251 multipliciret, und von dem Producte das Biquadrate der unbekannten Zahl subtrahiret, so bleiben 210. übrig. Man fraget, nach der Anzahl der neu-gegossenen Mörseln?

Auflösung.

Es sey die unbekannte Zahl $= x$. Multipliciret x durch den gegebenen Multiplicanten 251, und ziehet von dem Producte $251x$ das Biquadrate der unbekannten Zahl $x = x^4$ ab, so ist das übergebliebene $251x - x^4$ gleich 210. daher bekommet ihr diese Gleichung: $251x - x^4 = 210$. richtet die Gleichung ordentlich ein, daß der höchste Grad der unbekannten zu erst in derselben zu stehen komme, und bringet die andere Seite auf ein 0. stehet also: $-x^4 + 251x - 210 = 0$. suchet alle Divisores des lezten Gliedes, welche sind: 1. 2. 3. 5. 7. 6. 10. 14. 15. 21. 35. 30. 42. 70. 105. 210. machet die einfachen Gleichungen der wahren, und falschen Wurzeln, und dividiret darmit, wie dahier:

$$
\begin{array}{l|l}
-x^4 + 251x - 210 & x - 6 \text{ Divisor.} \\
-x^4 + 6x^3 & \overline{-x^3 - 6x^2 - 36x + 35} \\
\hline
* - 6x^3 + 251x - 210. & \\
\quad - 6x^3 + 36x^2 & \\
\hline
\quad * - 36x^2 + 251x - 210 & \\
\quad\quad - 36x^2 + 216x & \\
\hline
\quad\quad * \quad + 35x - 210 & \\
\quad\quad\quad + 35x - 210 & \\
\hline
\quad\quad\quad * \quad * &
\end{array}
$$

So findet ihr, daß $x - 6 = 0$ die gegebene Gleichung richtig dividire, und daher die gesuchte National - Wurzel, folgends die Zahl der neu - gegossenen Mörseln sey. Denn multipliciret 6 durch 251, und ziehet von dem Producte 1506 das Biquadrate von $6 = 1296$ ab, so bleiben 210. übrig, wie es die Bedingnisse der Aufgabe erfordern.

§. VI.

Aus dem gegebenen Multiplicante nebst der Summe des Productes, und der fünfften Dignität von der unbekañten Zahl, die Zahl selber zu finden.

Aufgabe.

191.) Es sind etliche Kugel - Pyramiden, wenn man die Zahl, so viel es deren sind, durch 824 multipliciret, und das Product, welches herauskomet, zu ihrer fünfften Dignität addiret, so ist die Zahl der Kugel - Pyramiden gleich 4320. Man fraget nach der Zahl der Kugel - Pyramiden.

Auflösung.

Es sey die unbekannte Zahl $= x$. Multipliciret x durch 824, und setzet das Producte $824x$ zu der fünfften Dignität von $x = x^5$, so ist diese Summe nach den Bedingnissen der Aufgabe $x^5 + 824x$ gleich 4320. daher bekommet ihr diese Gleichung:

$$x^5 + 824x = 4320.$$

Bringet die andere Seite auf ein 0. und suchet [§.II.n.184.] alle mögliche Divisores der Zahl 4320. machet die einfachen Gleichungen, und dividiret darmit, wie dahier.

$$x^5 + 824x - 4320 \quad \Big| \quad \frac{x - 4}{x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 64x + 1080}$$

$$x^5 - 4x^4$$

$$* \; + 4x^4 + 824x - 4320$$

$$+ 4x^4 - 16x^3$$

$$* \; + 16x^3 + 824x - 4320$$

$$+ 16x^3 - 64x^2$$

$$* \; + 64x^2 + 824x - 4320$$

$$+ 64x^2 - 256x$$

$$* \; + 1080x - 4320$$

$$+ 1080x - 4320$$

$$* \qquad *$$

So findet ihr, daß die Division durch $x - 4 = 0$ richtig sey. Folgends sind nur 4 Kugel-Pyramiden gewesen.

Beweiß.

Multipliciret 4 durch 824, und addiret das Product, welches herauskomet, 3296 zu der fünfften Dignität von $4 = 1024$, so giebet die Summe 4320. wie es die Bedingnisse der Aufgabe erfordern.

Ende des andern Theiles.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 824x - 4320 & x - 4 \\
\cline{2-2}
x^5 - 4x^4 & x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 64x + 1080 \\
\hline
* + 4x^4 + 824x - 4320 & \\
 + 4x^4 - 16x^3 & \\
\hline
\quad * + 16x^3 + 824x - 4320 & \\
\quad + 16x^3 - 64x^2 & \\
\hline
\qquad * + 64x^2 + 824x - 4320 & \\
\qquad + 64x^2 - 256x & \\
\hline
\qquad\quad * + 1080x - 4320 & \\
\qquad\quad + 1080x - 4320 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad * \qquad\quad * &
\end{array}
$$

So findet ihr, daß die Division durch $x - 4 = 0$ richtig sey. Folgends sind nur 4 Kugel-Pyramiden gewesen.

Beweiß.

Multipliciret 4 durch 824, und addiret das Product, welches herauskommet, 3296 zu der fünfften Dignität von $4 = 1024$, so giebet die Summe 4320. wie es die Bedingnisse der Aufgabe erfordern.

Ende
des andern Theiles.

Eberenz, Johann Baptist

Algebra, Oder Gründliche Anweisung Zu Der Buchstaben-Rechen-Kunst

Bd.: Anderter Theil

Augspurg und Freyburg im Breyßgau 1758

4 Math.p. 103 a-1/3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10479429-9
VD18 90906772